

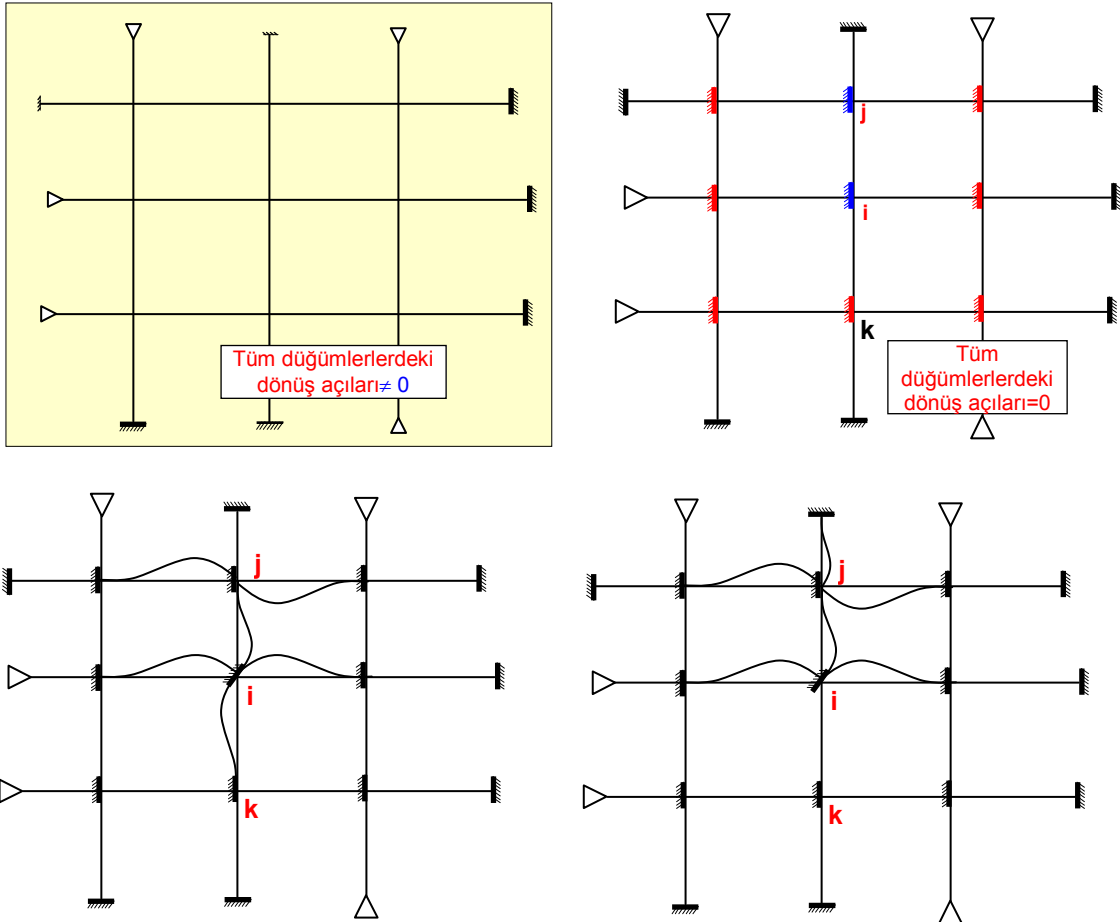
## BÖLÜM 5

### 5.1. CROSS METODU (HARDY CROSS-1932)

Hiperstatik sistemlerin çözümünde kullanılan cross yöntemi açı yönteminin özel bir hali olup moment dağıtma (iterasyon) metodu olarak da kullanılmaktadır. Açı metodunda düğümlerde moment ve yatay dengeler yazılarak düğümlerdeki dönüş açıları ve deplasmanlar bulunarak sistem çözüldüğü halde Cross metoduyla hiperstatik sistemlerin çözümünde önce rijit düğüm noktalarında dönüşleri sıfır yapacak şekilde kilitlenir. Kilitleme ankastrel momentlerin farkının ters işaretlisi olan bir dış momentle yapılır. Yani açı metodunda olduğu gibi düğümdeki toplam moment sıfır olacak şekilde düzenlenir. Bu uygulanan dış moment düğümde sadece dengeyi sağlamak için kabul edilen bir moment olduğu için aranan moment olarak kabul edilmemelidir. Bu kilitleme momentinden dolayı düğümde bir dönüş ve bu dönüş sonucunda da düğümdeki çubukların uçlarında bir moment oluşacaktır. Bu yöntemde bir düğümde;

1. Düğüm noktalarında dış yüklerden dolayı oluşan **ankastrelik** momentleri,
2. Komşu düğümlerden gelen ( $2EI/L$ 'den  $1/2$ ) momentler,
3. Birim yatay ( $\delta=1$ ) yüklemelerinden gelen ( $k=-3k/L$  ve  $k=-2k/L$ ) momentler,

olmak üzere bu **üç** momentin farkı TERS işaretli olarak o düğümde birleşen çubuk uçlarına rijitlikleri oranında dağıtılır ve  $k$  çubuklarının ucuna düşen momentin yarısı da komşu düğümde gönderilir.



1. Diğer bütün düğümler kilitli, sadece i serbest 2.  $\phi_i$  bulunduktan sonra i aynı kalsın ve j serbest

### I. İterasyon

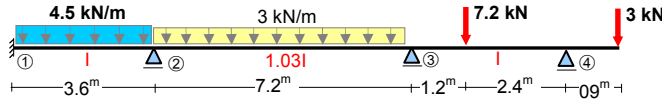
1. Bütün düğümlerdeki dönüş açıları sıfır
2. Sadece  $i$  noktası serbest yani  $\varphi_i \neq 0$  olsun ve buradan  $\varphi_i$  kolayca bulunur.
3. Sadece  $j$  noktası serbest yani  $\varphi_j \neq 0$  olsun ve  $\varphi_i$  yukarıda bulunan değerde olsun. Buradan  $\varphi_i$  bilindiğine göre  $\varphi_j$  kolayca bulunur.
4. Sadece  $k$  noktası serbest yani  $\varphi_k \neq 0$  olsun ve  $\varphi_i - \varphi_j$  yukarıda bulunan değerde olsun. Buradan  $\varphi_i$  ve  $\varphi_j$  bilindiğine göre  $\varphi_k$  kolayca bulunur.
5. Yukarıdaki işlemler dönüş açısı olan bütün düğümler için yapılır ve ilk dönüş açıları bulunmuş olur. Yani başlangıçta sıfır olan dönüş açıları yerine değerleri bulunmuş olur.

### II. İterasyon

1. İşlemler tekrar baştan başlanarak yapılır  $n$  inci düğüme kadar yapılır ve ikinci iterasyon tamamlanır.

### III. İterasyon

1. Değişim sıfır olduğu zaman iterasyona son verilir. Ve böylece düğümlerdeki dönüş açıları bulunur.

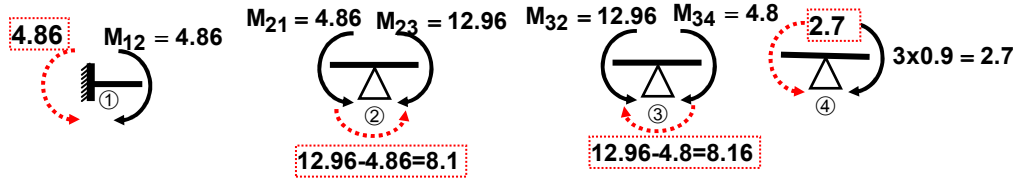


Düğümlerdeki ankastrelik momentleri açı metodunda olduğu gibi bulunur.

$$-M_{12} = M_{21} = \frac{4.5 \times 3.6^2}{12} = 4.86 \text{ kNm} \quad -M_{23} = M_{32} = \frac{3 \times 7.2^2}{12} = 12.96 \text{ kNm}$$

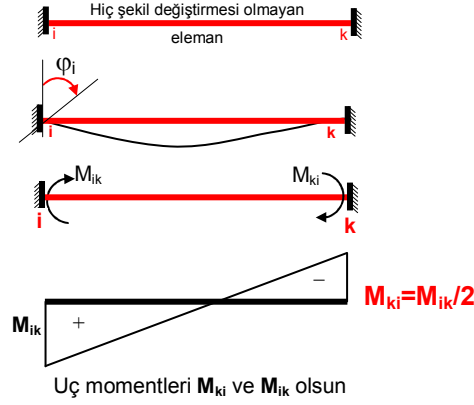
$$-M_{34} = \frac{Pab(l+b)}{2L^2} = \frac{7.2 \times 1.2 \times 2.4(3.6 + 2.4)}{2 \times 3.6^2} = 4.80 \text{ kNm}$$

Bu ankastrelik momentleri düğümlere uygulanarak düğümlerdeki momentlerin dengede olması için kesikli çizgilerle gösterilen momentler düğümlere uygulanarak bütün düğümler kilitlenir. ④ nolu düğüm sabit mesnet olduğu için sadece dış yüklerden dolayı oluşan bir moment ( $3 \times 0.9 = 2.7 \text{ kNm}$ ) bulunmaktadır.

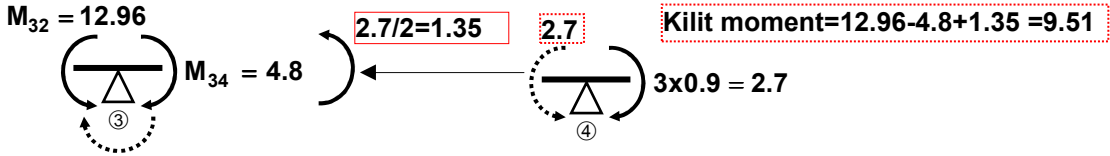


Daha sonra düğümlerden istenilen bir tanesi açılır. Bu düğümleri açma işlemine kilitleme momenti olan ankastrelik momentleri farkının ters işaretlisinin mutlak değerce büyük olanından başlamak iterasyonun adım sayısını azaltacağından daha uygundur. Bu örnekte üç nolu düğüm açılarak ankastrelik momentler farkı olan kesikli çizgilerle gösterilen kilitleme momenti **8.16 kNm** lik moment bulunur. Ancak, ④ nolu düğümde konsoldaki yükten dolayı oluşan bir **2.7 kNm** lik bir moment bulunmaktadır. Konsol yüklerden dolayı oluşan momentlerin, kenar mesnetteki

dış yük olan momentlerin yarısı ve bir düğümde bulunan dengeleyici momentin yarısı karşı mesnede aşağıdaki kabulden dolayı geçer. Yani, düğümde dengeleyici momentten dolayı bir dönme ve bunun sonucunda da bir moment oluşacaktır. Oluşan bu momentin yarısı aynı işarette çubuğun diğer ucuna geçer. Komşu düğüm mafsallı ise bu momentin yarısı geçmeyecektir. Açılı yönteminin esasını teşkil eden bu kabuller açılı metodu denklemlerinin çıkarılmasında aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.



Buna göre ④ mesnedindeki momentin yarısı ③ mesnedine artı olarak geçer. Konsol momentleri sağdan sola artı soldan sağa eksi geçer. Çerçeveselerde ise mütemadi kirişlerin tam tersi olmaktadır. Bu durum açılı yönteminde tablo halinde açıklanmıştır.



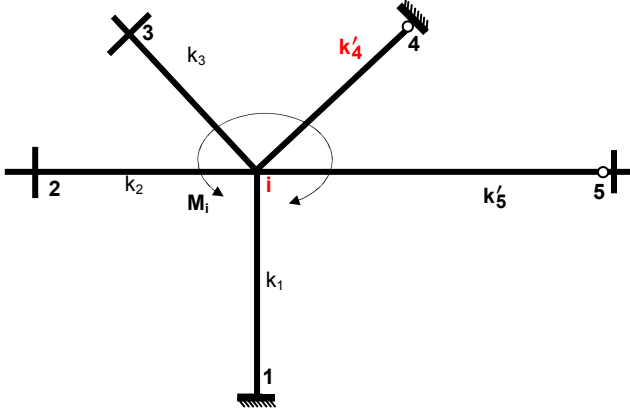
**9.51 kNm** lik dengeleyici kilit momenti düğümüne birleşen çubukların toplamı bir olan ve rijitlikleri dikkate alınarak hesaplanan dağıtma sayıları oranında ters işaretli olarak paylaşılarak düğüm dengesi sağlanır. Çubuklara gelen bu momentlerin yarısı aynı işarette çubuğun diğer ucuna yani komşu düğümlere gönderilir. Sistemin çözümü için diğer bütün düğümlerin dengesi sağlanması şartından dolayı aynı işlem diğer komşu düğümlerde yapılır. Komşu düğümde dengeleyici moment o düğümde önceden bulunan kilit momentini (ankastrelik momentleri farkı olan moment) ile komşu düğümdeki dengelemeden gelen momentin toplamı ters işaretli olarak düğümüne birleşen çubukların dağıtma sayıları oranında dağıtılarak düğüm dengesi sağlanmış olur. Bu dengeden dolayı oluşan momentlerin yarısı çubuğun diğer ucuna yani düğüm noktasına gönderilir. Bu işleme komşu düğümlerden gelen momentlerin küçülmesi durumunda son verilerek her çubuğun ucundaki momentler toplanarak son verilir. Bu toplam sonucu her düğümdeki momentlerin toplamı açılı metodu gibi sıfır olmalıdır. Bir çubuğun uç momentini,

1. Ankastrelik momentleri
2. Düğümdeki dengelemeden dolayı dağıtma sayıları oranında gelen moment
3. Çubuğun diğer ucundaki düğüm dengelemesinden dolayı o uçta oluşan momentin yarısı

momentlerinin toplamıdır.

## 5.2. DÜĞÜM NOKTALARI SABİT ( $\delta=0$ ) SİSTEMLER

Düğüm noktaları sabit sistemler 4. bölümde açıklanan sistemlerdir. Bu sistemlerin cross yöntemi ile çözümünde yatay deplasmanlar  $[\delta=0]$  sıfır alınmaktadır.



$$\varphi_i \neq 0$$

$$\varphi_2 = 0$$

$$\varphi_3 = 0$$

$$\varphi_4 = 0$$

$$\bar{M}_i = \text{toplam ankastrelilik momentleri}$$

Herhangi bir çerçeveden alınan yukarıdaki i düğümünde moment dengesi yazılır ise,

$$2(k_1 + k_2 + k_3 + k'_4 + k'_5) \varphi_i + \sum \bar{M}_i = 0 \quad \varphi_i = - \left[ \frac{\sum \bar{M}_i}{2[k_1 + k_2 + k_3 + k'_4 + k'_5]} \right]$$

$$M_{i1} = k_1(2 \cdot \varphi_i) + \bar{M}_{i1} \quad M_{i2} = k_2(2 \cdot \varphi_i) + \bar{M}_{i2} \quad M_{i3} = k_3(2 \cdot \varphi_i) + \bar{M}_{i3}$$

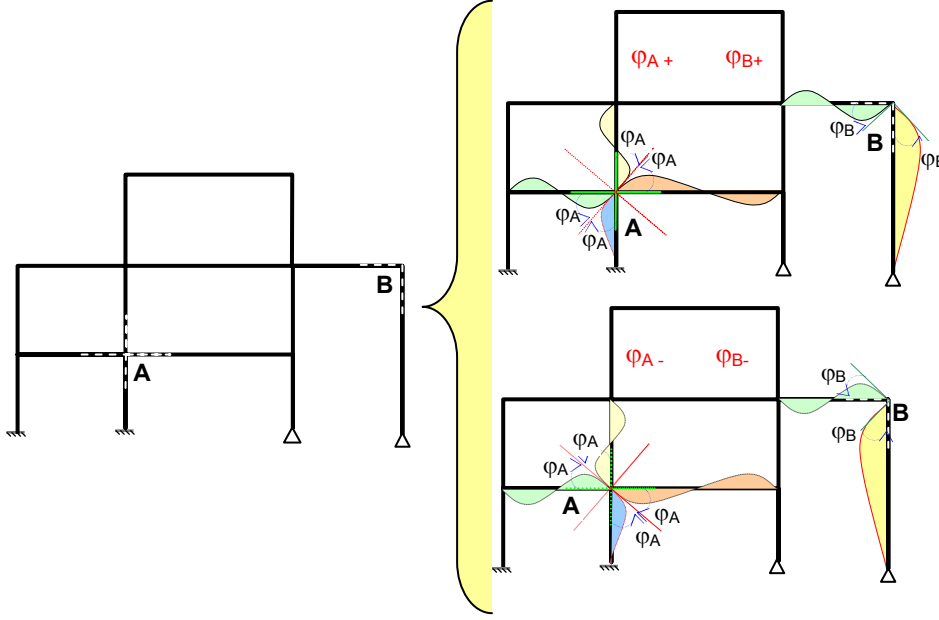
$$M_{i4} = k'_4(2 \cdot \varphi_i) + \bar{M}_{i4} \quad M_{i5} = k'_5(2 \cdot \varphi_i) + \bar{M}_{i5}$$

Bu denklemlerde  $\varphi_i$ 'nin yukarıdaki bulunan değerleri yerine yazılırsa,  $M_{i1} = k_1(2\varphi_i) + \bar{M}_{i1}$

$$\left. \begin{aligned} M_{i1} &= \frac{k_1 \sum \bar{M}_i}{(k_1 + k_2 + k_3 + k'_4 + k'_5)} + \bar{M}_{i1} \\ M_{i2} &= \frac{k_2 \sum \bar{M}_i}{(k_1 + k_2 + k_3 + k'_4 + k'_5)} + \bar{M}_{i2} \\ M_{i3} &= \frac{k_3 \sum \bar{M}_i}{(k_1 + k_2 + k_3 + k'_4 + k'_5)} + \bar{M}_{i3} \\ M_{i4} &= \frac{k'_4 \sum \bar{M}_i}{(k_1 + k_2 + k_3 + k'_4 + k'_5)} + \bar{M}_{i4} \\ M_{i5} &= \frac{k'_5 \sum \bar{M}_i}{(k_1 + k_2 + k_3 + k'_4 + k'_5)} + \bar{M}_{i5} \end{aligned} \right\} = -M_i$$

$$\left. \begin{aligned} d_{i1} &= \frac{k_1}{(k_1 + k_2 + k_3 + k'_4 + k'_5)} \\ d_{i2} &= \frac{k_2}{(k_1 + k_2 + k_3 + k'_4 + k'_5)} \\ d_{i3} &= \frac{k_3}{(k_1 + k_2 + k_3 + k'_4 + k'_5)} \\ d_{i4} &= \frac{k'_4}{(k_1 + k_2 + k_3 + k'_4 + k'_5)} \\ d_{i5} &= \frac{k'_5}{(k_1 + k_2 + k_3 + k'_4 + k'_5)} \end{aligned} \right\} \Sigma d = 1$$

$[d_{i1} + d_{i2} + d_{i3} + d_{i4} + d_{i5}]$  bunların her birine **DAĞITMA SAYISI** denir ve her düğüm için toplamları her zaman =1 olması gerekir. Bu  $d_{in}$  sayıları düğümüne birleşen çubukların  $k = \frac{2I}{L}$  ve/veya  $k' = \frac{1.5I}{L}$  rijitlikleri oranına göre değişen dağıtma sayılarıdır.



**Hiperstatik bir sistemim Cross metodu ile çözümünde izlenen yol sırasıyla;**

1. Düğümüne birleşen çubukların  $k$  ve/veya  $k'$  değerleri ve bunlara bağlı olarak bulunan dağıtma sayıları hesaplanır.

$$d_{i1} = \frac{k_1}{\sum k_n} \quad d_{i2} = \frac{k_2}{\sum k_n} \quad d_{i3} = \frac{k_3}{\sum k_n}$$

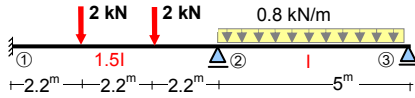
2. Çubuğun mesnet şartlarına yükleme durumuna göre ankastrelik momentleri hesaplanır.
3. Çözüm şeması hazırlanarak dağıtma sayıları ve ankastrelik momentleri belirlenir.
4. Düğümlerde bulunan ankastrelik momentleri işaretlerine göre toplanarak mutlak değerce büyük olan momentin bulunduğu düğümden dağıtımına başlanır.
5. Dağıtma sayılarına göre dağıtılan ankastrelik momentleri işaretlerinin tersi olarak dağıtılır. Yani ankastrelik momentleri eksi ise artı, artı ise eksi olarak dağıtılır.
6.  $k$  çubuklarında dağıtım sonucu bulunan  $M_{ij}$  momentleri çubuğun diğer ucuna yarısı aynı işarette geçer. Bu geçiş  $k'$  çubuklarında yapılmaz.



7. Düğümlerde dağıtılacak moment sıfıra yaklaşınca dağıtımına son verilir.

8. Döğümlerde dağıtım bittikten sonra ankastrelik momentler dahil bütün momentler işaretleri ile toplanır. (bir döğümde bulunan momentlerin toplamı sıfır olacağına dikkat edilmelidir değilse hesaplar kontrol edilir)
9. Çözüm sonucu bulunan momentler işaretlerine göre [saat yönü +, tersi -] döğüm noktalarına işaretlenerek momentler çekme meydana getiren yüze çizilir.
10. Çubuk uçlarında bulunan bu momentlere ve dış yüklere göre çubuk açıklık momentleri, kesme ve aksel kuvvetleri bulunarak sistemin istenilen **M**, **V** ve **N** alanları çizilir.

**ÖRNEK 5.1:** Şekilde yüklemesi ile birlikte verilen mütemadi kirişin moment ve kesme kuvvet diyagramlarını **Cross** metodu ile çiziniz.

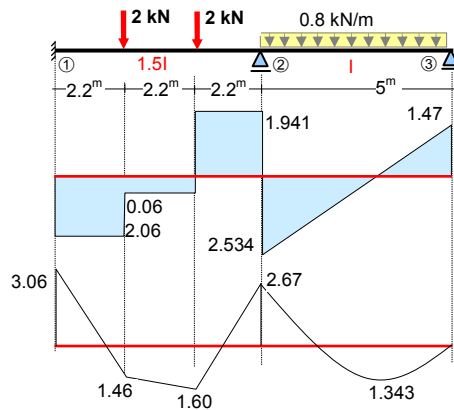


**Ankastrelik**  $-M_{12} = M_{21} = \frac{Pa(L-a)}{L} = \frac{2 \times 2.2(6.6-2.2)}{6.6} = 2.93 \text{ kNm}$   $-M_{23} = \frac{0.8 \times 5^2}{8} = -2.50 \text{ kNm}$

Ankastrelik momentleri ve dağıtma sayıları tablo yapılarak yazılır. Daha sonra dağıtım yapılacak döğümde dağıtılacak moment bulunur. Örneğin ② döğümünde dağıtılacak **M = 2.93 - 2.5 = 0.43 tm** olarak bulunur. Bu fark moment artı işaretlidir. Döğümde dengenin olabilmesi için bu momentin eksi işaretli olarak dağıtılması gerekir. Yani döğümde dağıtılacak momentin ters işaretlisi olan **M = -0.43 tm** dağıtılır.

$$\left. \begin{array}{l} M_{21} = d_{21} M = 0.603 \times (-0.43) = -0.259 \\ M_{23} = d_{23} M = 0.397 \times (-0.43) = -0.171 \end{array} \right\} \text{Döğümde dağıtım sonucu bulunan momentlerin toplamı dağıtılan momente eşit olmalıdır (0.43).}$$

Döğüm		①	②		③
Çubuk uçları		①-②	②-①	②-③	③-②
Çubukların k değerleri			<b>0.455</b>	<b>0.300</b>	
Dağıtma sayıları			0.455/[0.455+0.3]= <b>0.603</b>	0.3/[0.455+0.3]= <b>0.397</b>	
Ankastrelik momentleri		<b>-2.93</b>	<b>2.93</b>	<b>-2.50</b>	
Döğüm	Dağıtılacak moment				
<b>2</b>	<b>(-2.5+2.93) = 0.43</b>	-0.130	-0.43x0.603= <b>-0.259</b>	-0.43x0.397= <b>-0.171</b>	
<b>Uç momentleri</b>		<b>-3.06</b>	<b>2.671</b>	<b>-2.671</b>	<b>0.00</b>



1. açıklıkta  $\max Ma\check{c} = ((2.059 \times 2.2 - 3.06)) = 1.47 \text{ kNm}$   
 1. açıklıkta  $\max Ma\check{c} = ((2.059 \times 2.2 + 0.059 \times 2.2 - 3.06)) = 1.60 \text{ kNm}$   
 2. açıklıkta  $\max Ma\check{c} = ((1.466^2 / 0.8)) \times 0.5 = 1.343 \text{ kNm}$  veya  
 2. açıklıkta  $\max Ma\check{c} = ((2.534^2 / 0.8)) \times 0.5 - 2.671 = 1.343 \text{ kNm}$

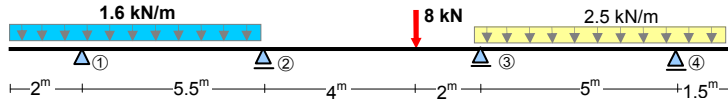
Verilen bu sistemde bilinmeyen  $\phi_2$  dir. Burada  $\phi_2$  nin bulunması için,

$$M_{21} = 2k_{21}\phi_2 \quad \phi_2 = \frac{M_{21}}{2k_{21}}$$

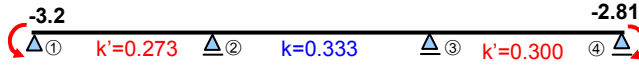
bağıntısından hesaplanır. Buradaki  $M_{21}$  momenti ② düğümünde ankastrelik ve komşu düğümlerden gelen momentlerin haricinde dağıtım sonucunda bulunan momentlerin toplamıdır.

$$2-1 \text{ elemanı } \phi_2 = \frac{M_{21}}{2k_{21}} = \frac{-0.259}{2 \times 0.455} = 0.285 \quad 2-3 \text{ elemanı } \phi_2 = \frac{M_{23}}{2k_{23}} = \frac{-0.171}{2 \times 0.300} = -0.285 \text{ olur.}$$

**ÖRNEK 5.2:** Verilen kirişin moment alanının **Cross** yöntemini kullanarak çizimi. [Bütün kirişler EI]



**Çözüm:** Elemanların k değerleri ve ankastrelik momentleri hesaplanır.

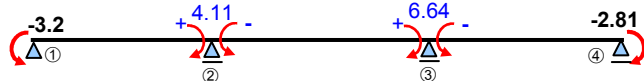


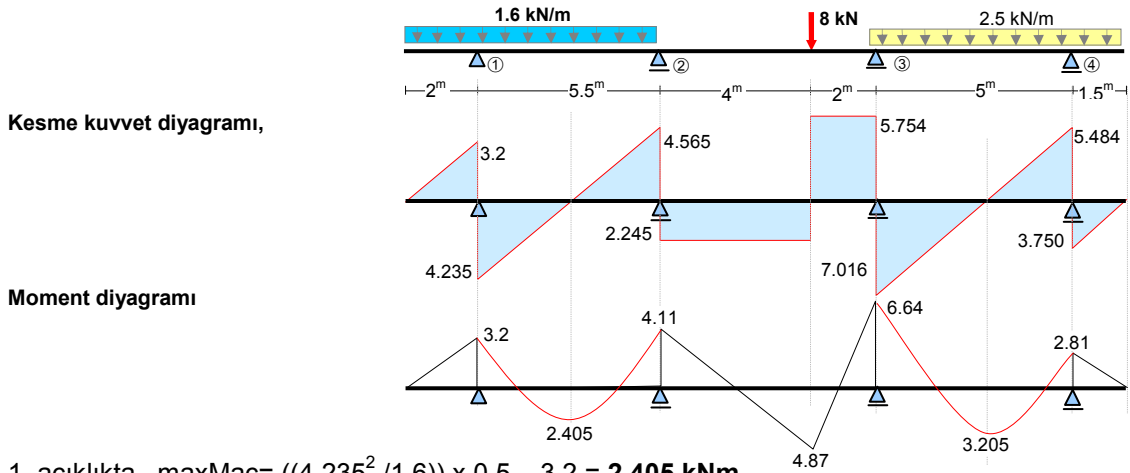
Ankastrelik

$$M_{21} = \frac{1.6 \times 5.5^2}{8} = 6.05 \text{ kNm} \quad -M_{23} = \frac{8 \times 4 \times 2^2}{6^2} = 3.56 \text{ kNm} \quad M_{32} = \frac{8 \times 2 \times 4^2}{6^2} = 7.11 \text{ kNm} \quad -M_{34} = \frac{2.5 \times 5^2}{8} = 7.81 \text{ kNm}$$

Düğüm		①	②		③		④		
Çubuk uçları		①-②	②-①	②-③	③-②	③-④	④-③		
k değerleri			0.273	0.333	0.333	0.30			
Dağıtım sayıları			0.45	0.55	0.53	0.47			
Ankastrelik momentleri		<b>-3.2</b>	<b>-1.6</b>	<b>6.05</b>	<b>-3.56</b>	<b>7.11</b>	<b>-7.81</b>	<b>1.41</b>	<b>-2.81</b>
Düğüm	Dağıtılabilecek moment								
3	$(7.11 - 7.81 + 1.41) = 0.71$			-0.188	-0.376	-0.334			
2	$(6.05 - 1.6 - 3.56 - 0.188) = 0.702$		-0.316	-0.386	-0.193				
3	-0.193			0.053	0.106	0.092			
2	-0.053		-0.024	-0.029	-0.015				
					0.008	0.007			
Uç momentleri		<b>-3.2</b>	<b>4.110</b>	<b>-4.110</b>	<b>6.632</b>	<b>-6.635</b>		<b>-2.81</b>	

Dağıtım sonucu bulunan moment değerleri saat yönü artı tersi eksi olmak üzere çubuk uçlarına işaretlenerek moment alanı aşağıdaki şekilde çizilir.



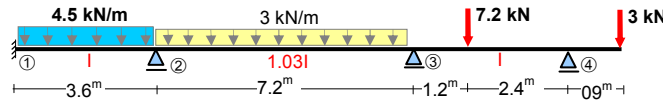


1. açıklıkta  $\max Maç = ((4.235^2 / 1.6)) \times 0.5 - 3.2 = 2.405 \text{ kNm}$

2. açıklıkta  $\max Maç = (2.245 \times 2 - 4.11) = 4.87 \text{ kNm}$

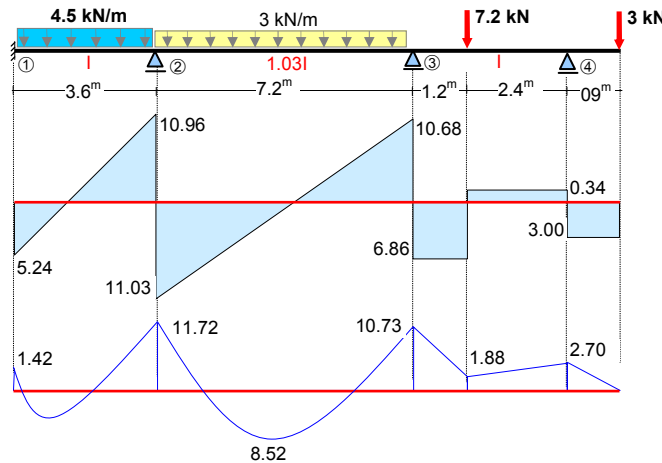
3. açıklıkta  $\max Maç = ((7.016^2 / 2.5)) \times 0.5 - 6.64 = 3.205 \text{ kNm}$

**ÖRNEK 5.2:** Verilen kirişin moment alanının **Cross** yöntemini kullanarak çözümü. [Bütün kirişler EI]



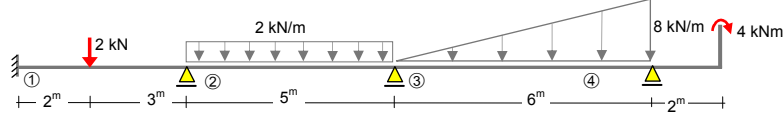
ÇUBUK UÇ MOMENTLERİ							
Düğüm		①	②	③	④		
Çubuk		①-②	②-①	②-③	③-②	③-④	④-③
k değerleri			$2x/3.6=0.556$	$2x1.03/7.2=0.287$	$2x1.03/7.2=0.287$	$1.5x/3.6=0.417$	
Dağıtma sayıları			$0.555/(0.555+0.287)=0.66$	$0.287/(0.555+0.287)=0.34$	$0.287/(0.417+0.287)=0.41$	$0.417/(0.417+0.287)=0.59$	
<b>Kilit momenti</b>					<b>1.35 [2.7/2]</b>		<b>-2.7</b>
Ankastrelik momentleri		-4.86	<b>4.86</b>	<b>-12.96</b>	<b>12.96</b>	<b>-4.8</b>	
Düğüm	Dağıtılacak <b>M</b>						
3	$12.96+1.35-4.8=9.51$			$-1.95[-3.9/2]$	$9.51 \times 0.41 = \underline{\underline{-3.90}}$	$9.51 \times 0.59 = \underline{\underline{-5.61}}$	
2	$-12.96-1.95+4.86 = \underline{\underline{-10.05}}$	3.32	$10.05 \times 0.66 = \underline{\underline{6.63}}$	$10.05 \times 0.34 = \underline{\underline{3.42}}$	<b>1.71</b>		
3	1.71			-0.35	<b>-0.70</b>	<b>-1.01</b>	
2	<b>-0.35</b>	0.12	<b>0.23</b>	<b>0.12</b>	0.06		
2	0.06				<b>-0.03</b>	<b>-0.04</b>	
<b>Uç momentleri</b>		<b>-1.42</b>	<b>11.72</b>	<b>-11.72</b>	<b>10.13</b>	<b>-10.11</b>	<b>-2.70</b>

Örnek daha önce açı yöntemine göre çözülmüş ve aynı değerler bulunmuştur.





**Uygulama:** Verilen mütemadi kirişin verilen yükler ve mesnet hareketlerinden dolayı oluşan M alanının elde edilmesi



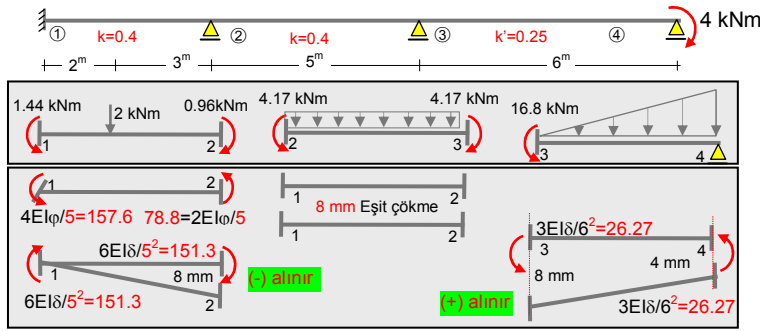
**Çözüm:** Verilen dış yüklerden ve mesnet çökme ve dönmelerinden oluşan ankastrelik momentleri

$$M_{12} = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{2 \times 2 \times 3^2}{5^2} = 1.44 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = \frac{Pba^2}{L^2} = \frac{2 \times 3 \times 2^2}{5^2} = 0.96 \text{ kNm [Tekil yük]}$$

$$-M_{23} = M_{32} = \frac{qL^2}{12} = \frac{2 \times 5^2}{12} = 4.167 \text{ kNm [Düzgünyayılı yük]}$$

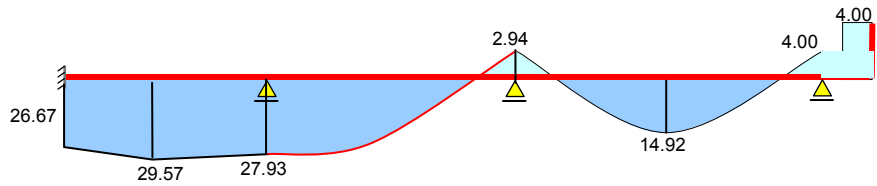
$$-M_{34} = \frac{7qL^2}{120} = \frac{7 \times 8 \times 6^2}{120} = -16.80 \text{ kNm [Üçgen yayılı yük]}$$



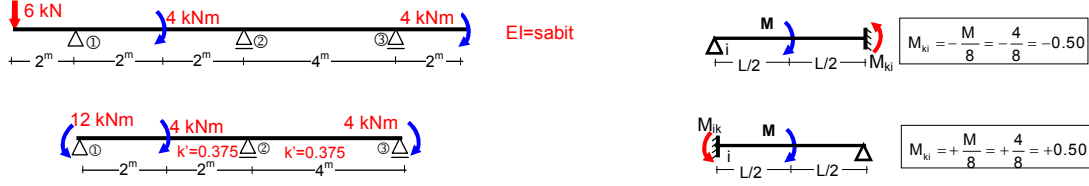
$$M_i = \bar{M}_i + \frac{4EI}{L} \varphi_i + \frac{2EI}{L} \varphi_k - \frac{6EI}{L^2} \delta$$

$$M_k = \bar{M}_k + \frac{4EI}{L} \varphi_k + \frac{2EI}{L} \varphi_i - \frac{6EI}{L^2} \delta$$

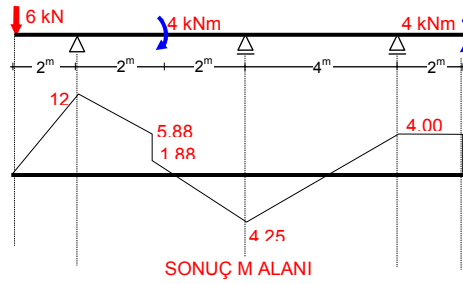
ÇUBUK UÇ MOMENTLERİ							
Düğüm		①	②	③	④		
Çubuk		①-②	②-①	②-③	③-②	③-④	④-③
k değerleri		0.4	0.4	0.4	0.4	0.25	
Dağıtma sayıları			0.5	0.5	0.615	0.385	
Ankastrelik momentleri	Dış yüklerden	-1.44	0.96	-4.167	4.167	-16.80+2	-4
	Mesnet çökmesi	-151.30	-151.30			26.27	
	Mesnet dönmesi	157.60	78.80				
Düğüm	Dağıtılacak M						
2	$0.96 - 151.3 + 78.8 - 4.167 = -75.71$	18.93	37.85	37.85	18.93		
3	$4.167 + 2 - 16.80 + 26.27 + 18.93 = 34.57$			-10.63	-21.26	-13.31	
2	-10.63	2.66	5.32	5.32	2.66		
3	2.66			-0.82	-1.64	-1.02	
2	-0.82	0.21	0.41	0.41	0.21		
3	0.21				-0.13	-0.08	
<b>Uç momentleri</b>		<b>26.66</b>	<b>-27.96</b>	<b>27.96</b>	<b>2.94</b>	<b>-2.94</b>	<b>-4</b>



**ÖRNEK 5.2:** Verilen mütemadi kirişin moment ve kesme kuvvet alanlarının **Cross** yöntemini kullanarak çizimi. [Bütün kirişler EI]



Düğüm		①	②		③		
Çubuk uçları		konsol	①-②	②-①	②-③	③-②	konsol
k değerleri				0.375	0.375		
Dağıtma sayıları				0.5	0.5		
Ankastrelik momentleri		-12.00		$-6.0(12/2)-0.50$	$2.00(4/2)$		4.00
Düğüm	Dağıtılabacak moment						
2	$2 \cdot 6 - 0.5 = -4.5$			2.25	2.25		
Uç momentleri		-12.00	-12.00	-4.25	4.25	-4.00	4.00

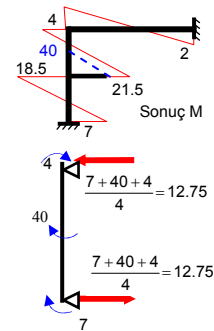


**ÖRNEK:** Şekilde kirişin açılı metoduyla moment alanını çizimi.

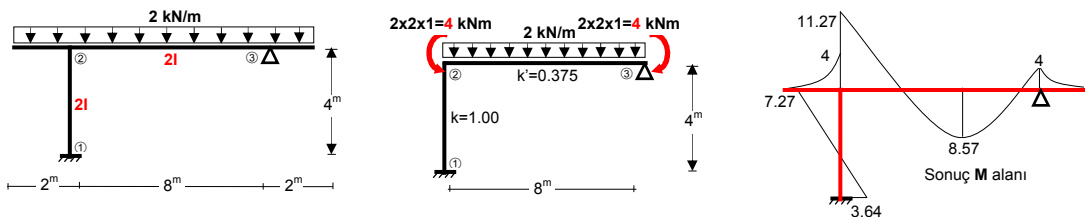


Ankastrelik momentleri  $M_{31} = M_{13} = [M/4] = [40/4] = 10.00$  kNm

Düğüm		①	③		④
Çubuk uçları		①-③	③-①	③-④	④-③
Çubukların k değerleri			0.5	0.333	
Dağıtma sayıları			0.60	0.40	
Ankastrelik momentleri		10.00	10.00		
Düğüm	Dağıtılabacak moment				
3	10	$6/2=3.00$	-6.00	-4.00	$-4/2=-2.0$
Uç momentleri		7.00	4.00	-4.00	-2.00

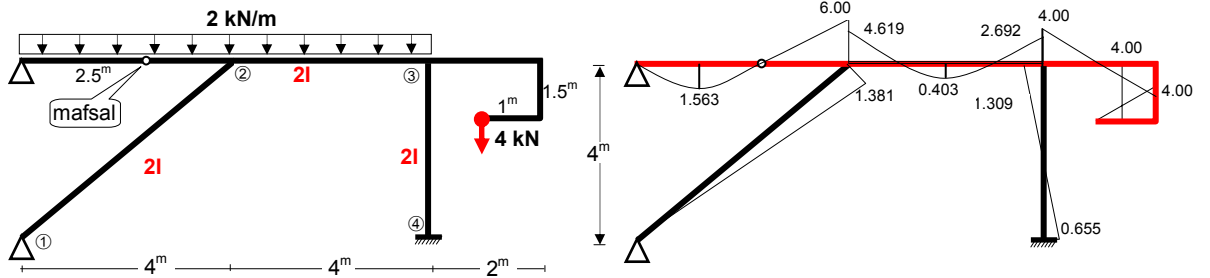


**ÖRNEK 5.4:** Şekilde verilen kirişin moment alanını **Cross** metoduyla çiziniz. (2I=sabit)

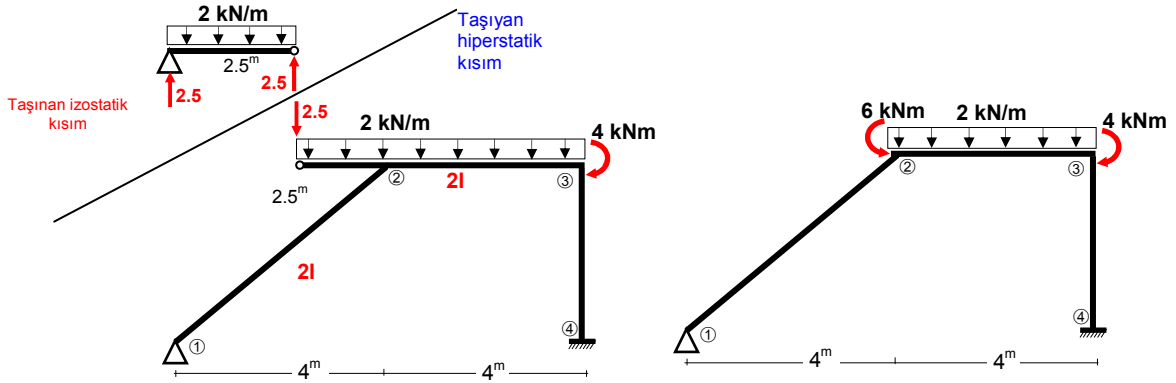


Düğüm		①	②			③	
Çubuk uçları		①-②	konsol	②-①	②-③	③-②	konsol
Çubukların k değerleri				1.00	0.357		
Dağıtma sayıları				0.727	0.273		
Ankastrelik momentleri		-	[-4.00]4.00	-	-16.00 2.00	[-4.00]4.00	-4.00
Düğüm	Dağıtılacak moment						
2	4+2-16=-10==10	3.64		7.27	2.73		
		3.64	4.00	7.27	-11.27	-4.00	-4.00
		3.64		0.00		-4.00	

**ÖRNEK 5.5:** Şekilde verilen kirişin moment alanını **Cross** metoduyla çiziniz.



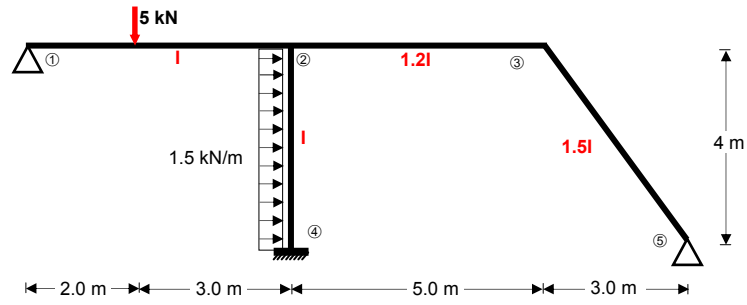
**Çözüm:** İlk önce sistemin taşıyan ve taşıyan kısımları ayrılarak taşıyan kısmın mesnet tepki kuvveti taşıyan hiperstatik kısma aktarılır ve hiperstatik kısmın çözümü yapılır.



$$\text{Ankastrelik momenti } -M_{23} = M_{32} = \frac{qL^2}{12} = \frac{2 \times 4^2}{12} = 2.67 \text{ kNm}$$

Düğüm		②	③					
Çubuk uçları		Konsol	②-①	②-③	③-②	③-④	Konsol	④-③
Çubukların k değerleri			0.53	1.00	1.00	1.00		
Dağıtma sayıları			0.346	0.654	0.500	0.500		
Ankastrelik momentleri		6.00		-2.67	2.67		-4.00	
Düğüm	Dağıtılacak moment							
2	6-2.67=3.33		-1.152	-2.178	-1.089			
3	2.67-4-1.089=2.419		0.605	1.210	1.210		0,605	
2	0.605		-0.209	-0.396	-0.198			
3	0.198		0.05	0.099	0.099		0,05	
2	0.05		-0.02	-0.03				
<b>Uç momentleri</b>		<b>6.00</b>	<b>-1.381</b>	<b>-4.619</b>	<b>2.692</b>	<b>1.309</b>	<b>-4.00</b>	<b>0.655</b>

**ÖRNEK 5.6:** Şekildeki çerçevenin moment alanının **Cross** metoduyla belirlenmesi.

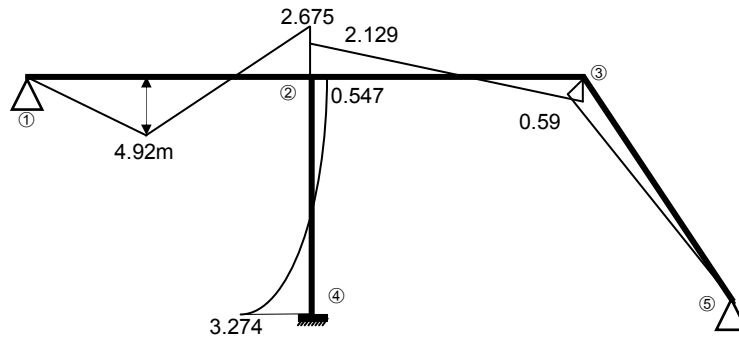


**Ankastrelik momentleri**

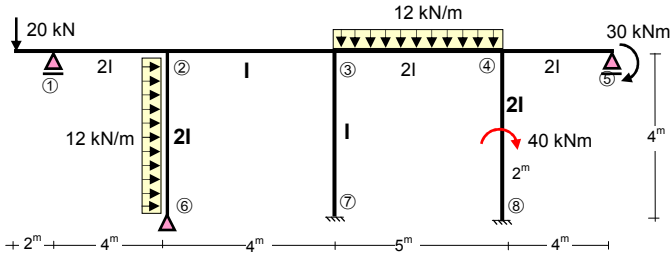
$$M_{21} = \frac{Pab(b+L)}{2L^2} = \frac{5 \times 3 \times 2(2+5)}{2 \times 5^2} = 4.20 \text{ kNm} \quad M_{24} = -M_{42} = \frac{1.5 \times 4^2}{12} = 2.00 \text{ kNm}$$

Düğüm		④	②			③	
Çubuk uçları		④-②	②-④	②-①	②-③	③-②	③-⑤
Çubukların k değerleri			0.5	0.30	0.48	0.48	0.45
Dağıtma sayıları			0.391	0.234	0.375	0.516	0.484
Ankastrelik momentleri		-2.00	2.00	4.20			
Düğüm	Dağıtılacak moment						
2	4.2+2=6.2	-1.212	-2.424	-1.451	-2.325	-1.163	
3	1.163				0.300	0.600	0.563
2	-0.300	-0.059	-0.117	-0.070	-0.113	-0.056	
3	0.056				0.015	0.029	0.027
2	-0.015	-0.003	-0.006	-0.004	-0.006		
<b>Uç momentleri</b>		-3.274	-0.547	2.675	-2.129	-0.590	0.590

**Moment alanı**

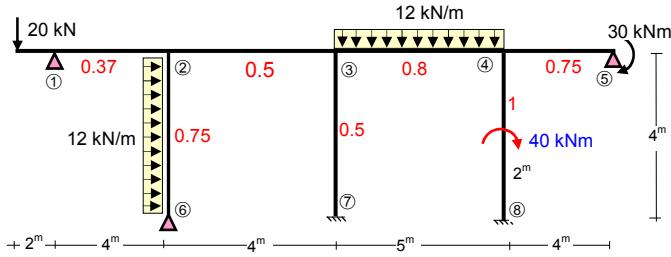


**ÖRNEK:** Düğüm noktaları hareketli sistemin moment alanının **CROSS** metodu ile çizimi.

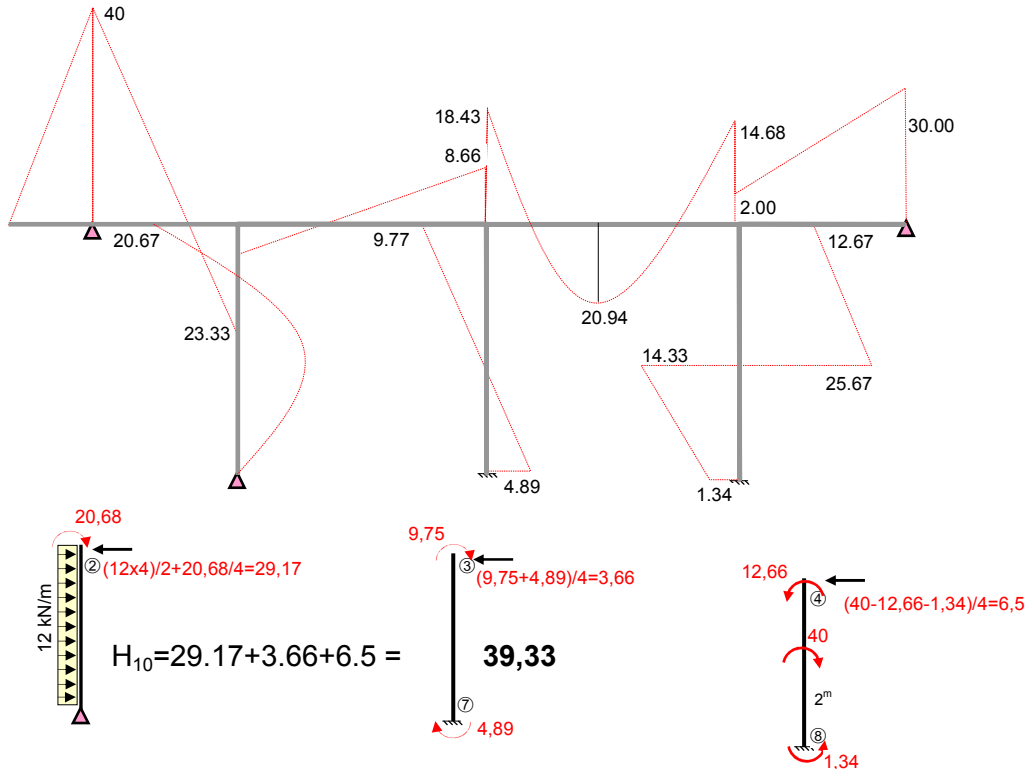


**Çözüm:** Sistemin düğüm noktaları sabit sistem olarak çözülür

$$\text{Ankastrelik momentleri } M_{26} = \frac{qL^2}{8} = \frac{12 \cdot 4^2}{12} = 24 \text{ kNm} \quad -M_{34} = M_{43} = \frac{qL^2}{12} = \frac{12 \cdot 5^2}{12} = 25 \text{ kNm} \quad M_{48} = M_{84} = \frac{M}{4} = \frac{40}{4} = 10 \text{ kNm}$$

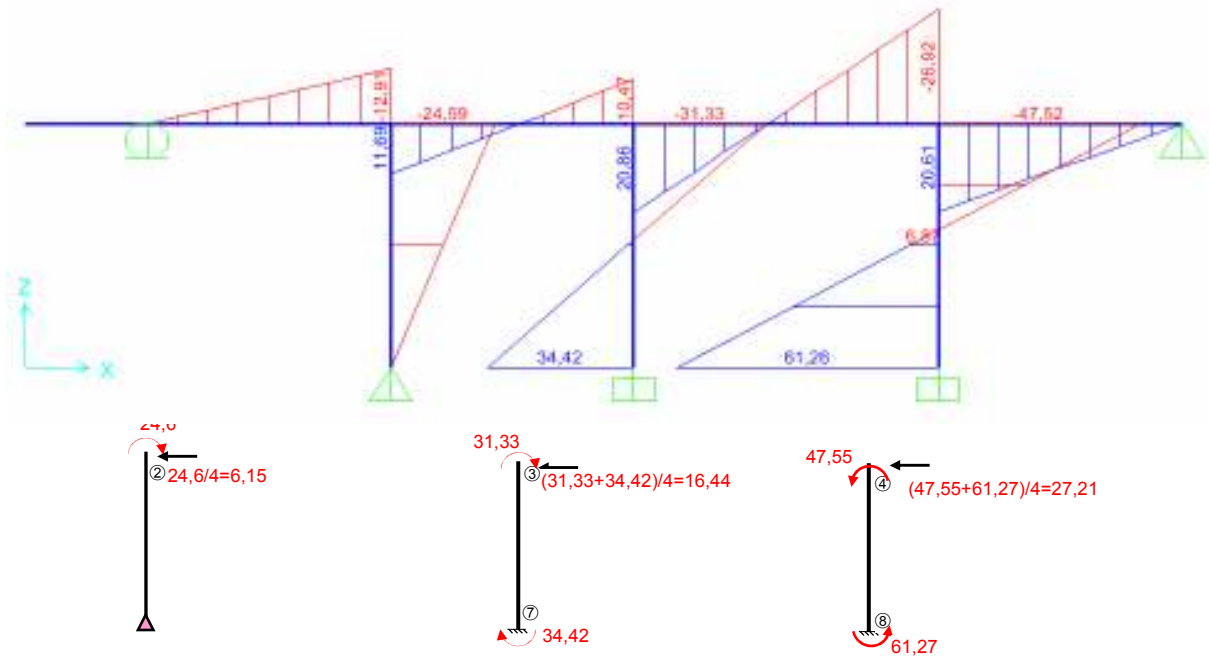


Düğüm	1	2			3			7	4			8	5
Uç	①-②	②-①	②-⑥	②-③	③-②	③-⑦	③-④	⑦-③	④-③	④-⑤	④-⑧	⑧-④	⑤-④
d		0.375	0.375	0.25	0.278	0.278	0.444		0.314	0.294	0.392		
M	40	-40/2	24				-25		25	30/2	40/4=10	40/4=10	30
4	50						-7.85		-15.7	-14.7	-19.6	-9.80	
3	32.85			4.57	9.13	9.13	14.59	4.56	7.3				
2	8.57	-3.21	-3.21	-2.14	-1.07								
4	7.30						-1.15		-2.29	-2.15	-2.86	-1.43	
3	-0.08			0.30	0.62	0.62	0.99	0.31	0.50				
2	0.3	-0.11	-0.11	-0.08									
4	0.5								-0.16	-0.15	-0.2	-0.10	
Σ	40	-23.32	20.68	2.05	8.68	9.75	-18.42	4.88	14.65	-2.00	-12.66	-1.33	30



Dış kuvvetler kaldırılarak sistem sadece  $\delta=1$  alınarak moment alanı bulunur.

<b><math>\delta=1</math> için çözüm</b>														
Düğüm		1		2		3		7	4		8	5		
Uç		①-②	②-①	②-⑥	②-③	③-②	③-⑦	③-④	⑦-③	④-③	④-⑤	④-⑧	⑧-④	⑤-④
<b>d</b>			0.375	0.375	0.25	0.278	0.278	0.444		0.314	0.294	0.392		
<b>M</b>				-37,5			-37,5		-37,5			-75	-75	
4	75													
3	25,72				3,58	7,15	7,15	11,78	3,58	5,71	22,05	29,4	14,7	
2	33,92		12,72	12,72	8,48	4,24								
4	5,35							-0,9		-1,79	-1,68	-2,24	-1,12	
3	3,34				-0,47	-0,93	-0,93	-1,48	-0,47	-0,74				
2	0,47		0,18	0,18	0,12	0,06								
4	0,74							0,12		0,23	0,22	0,29	0,15	
3	0,18				-0,03	-0,05	-0,05	-0,08	-0,03					
<b>Σ</b>			12,9	-24,6	11,68	10,47	-31,33	20,86	-34,42	26,96	20,59	-47,55	-61,27	



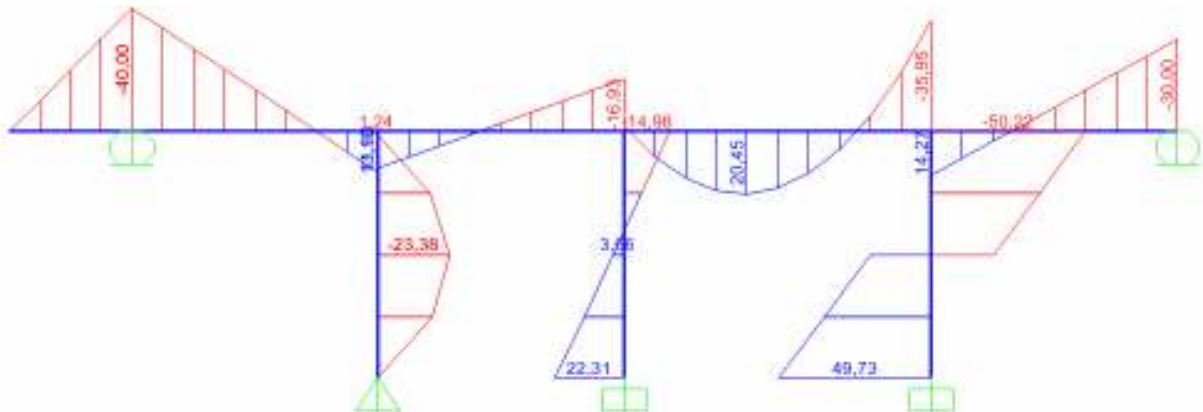
$$H_{11} = 6.15 + 16.44 + 27.21 = 49,79 \quad H_{10} - \delta \cdot H_{11} = 0 \quad 39.33 - 49.79\delta = 0 \quad \delta = 0.790$$

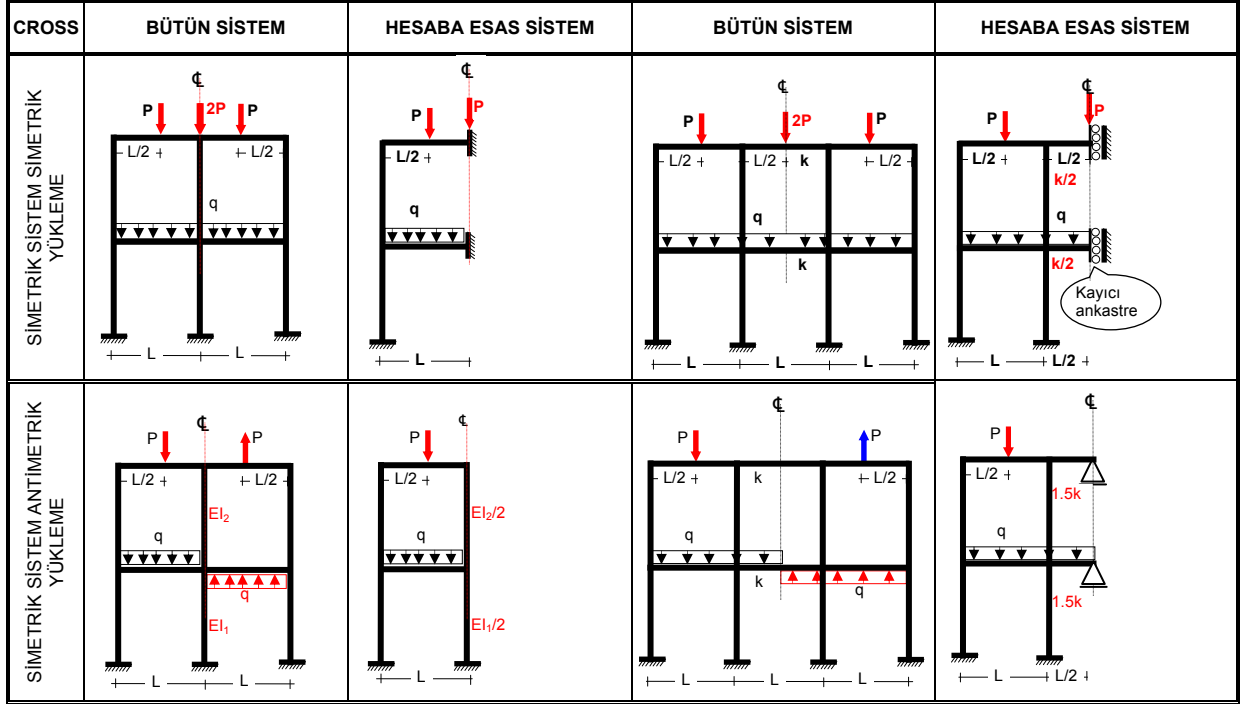
Momentler  $M = M_0 + \delta \cdot M_1$  eşitliğinden hesap edilir. Örnek momentler:

$$M_{73} = 4,88 + 0,790 \cdot (-34,42) = 22,31$$

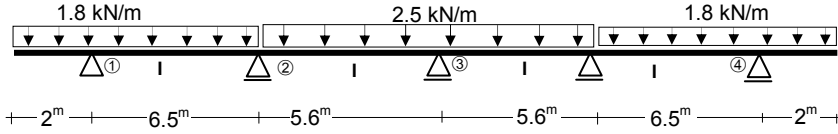
$$M_{84} = -1,33 + 0,790 \cdot (-61,27) = -49,73$$

$$M_{32} = 8,68 + 0,790 \cdot 10,47 = 16,95$$

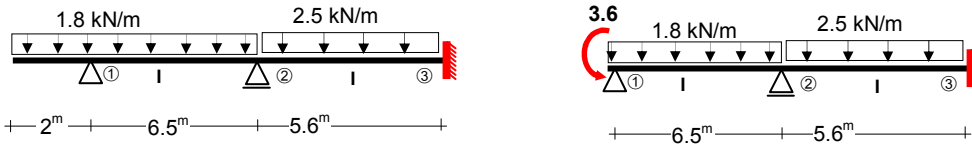




**ÖRNEK 5.3:** Şekilde verilen mütemadi kirişin moment alanını **Cross** metoduyla ve **simetri** özelliğinden yararlanarak çiziniz. (**I=sabit**)



**Çözüm:** Simetri eksenini mesnetten geçtiği için yarım sistem aşağıdaki şekilde belirlenerek çözüme başlanır.



Ankastrelik momentleri  $-M_{23} = \frac{2.5 \times 5.6^2}{12} = 6.53 \text{ tm}$   $M_{21} = \frac{1.8 \times 6.5^2}{8} = 9.51 \text{ tm}$

Düğüm	①	②	③
Çubuk uçları	①-②	②-①	②-③
Çubukların k değerleri		0.231	0.357
Dağıtma sayıları		0.39	0.61
Ankastrelik momentleri	-3.6	-1.8 9.51	-6.53 6.53
Düğüm	Dağıtılacak moment		
2	$(-1.8-6.53+9.51)=-1.18$	-0.46	-0.72
<b>Uç momentleri</b>	-3.6	7.25	-7.25 6.17

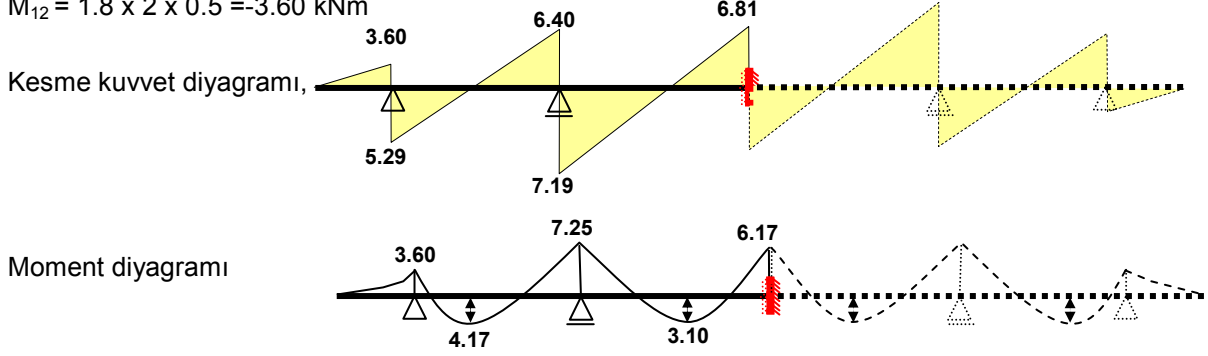
Bulunan uç momentlerinin aynı sistemin açılı metoduyla çözümünüyle bulunan momentlerle aynı olduğu görülür. Açılı ile çözüm sonuçları aşağıda verilmiştir.

$$M_{21} = 0.231 ( 2 \times (-1.003) ) + 9.51 - 1.8 = 7.23 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 0.357 ( 2 \times (-1.003) ) - 6.53 = -7.25 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = 0.357 ((-1.003)) + 6.53 = 6.17 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = 1.8 \times 2 \times 0.5 = -3.60 \text{ kNm}$$

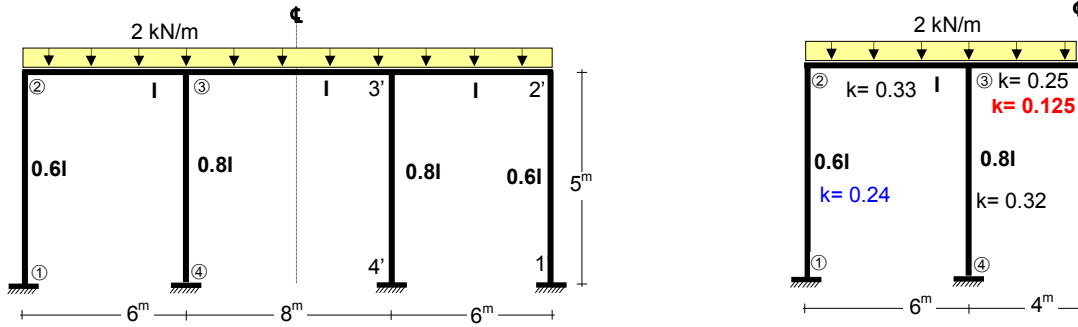


1. açıklıkta  $\max M_{a\check{c}} = ((5.29^2 / (2 \times 1.8)) - 3.6 = 4.17 \text{ kNm}$

2. açıklıkta  $\max M_{a\check{c}} = ((6.807^2 / (2 \times 2.5)) - 6.17 = 3.097 \text{ kNm}$  veya

2. açıklıkta  $\max M_{a\check{c}} = ((7.193^2 / (2 \times 2.5)) - 7.25 = 3.097 \text{ kNm}$

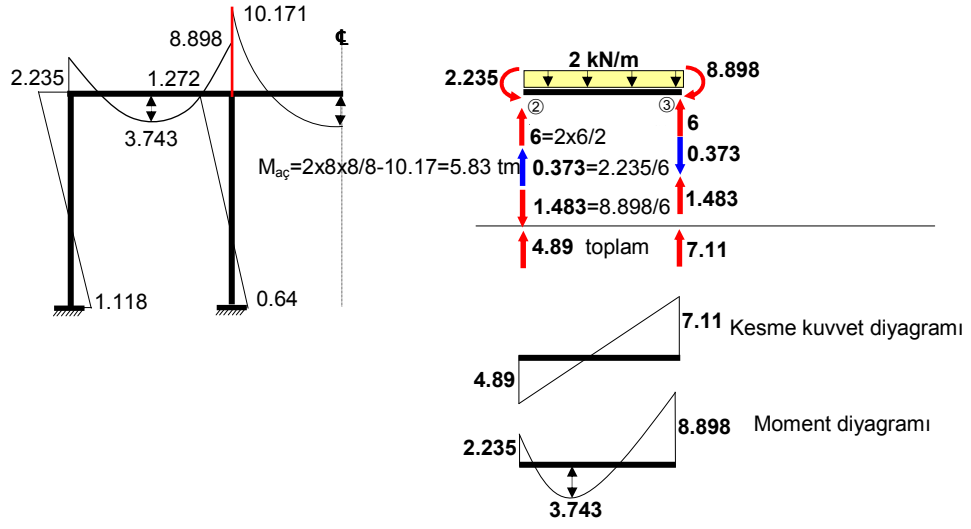
**ÖRNEK 5.7:** Şekilde verilen sistemi ve yüklemesi simetrik sistemi **simetri** özelliğini kullanarak **Cross** metoduyla çözüünüz. ( $\delta=0$ )



**Ankastrelik momentleri,**  $-M_{23} = M_{32} = 2 \times 6^2 / 12 = 6 \text{ kNm}$   $-M_{35} = M_{53} = 2 \times 8^2 / 12 = 10.66 \text{ kNm}$

Düğüm		①	②	③			④	
Çubuk uçları		①-②	②-①	①-③	③-①	③-④	③-⑤	④-③
DağıtkNma sayıları			0.419	0.591	0.428	0.411	0.161	
Ankastrelik momentleri				-6.0	6.0		-10.67	
Düğüm	Dağıtıllacak moment							
3	-4.67			1.00	2.00	1.919	0.752	0.96
2	-5.0	1.048	2.095	2.955	1.478			
3	1.478			-0.316	-0.633	-0.608	-0.238	-0.304
2	-0.316	0.066	0.132	0.187	0.093			
3	0.093			-0.020	-0.040	-0.038	-0.015	-0.019
2	-0.020	0.004	0.008	0.012				
<b>Uç momentleri</b>		<b>1.118</b>	<b>2.235</b>	<b>-2.206</b>	<b>8.898</b>	<b>1.273</b>	<b>-10.171</b>	<b>0.64</b>





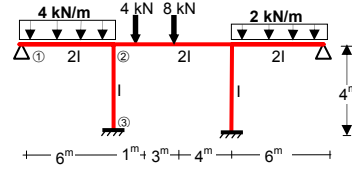
1. açıklıkta  $\max M_{a\check{c}} = ((4.890^2 / 2)) \times 0.5 - 2.235 = 3.743 \text{ kNm}$

veya

1. açıklıkta  $\max M_{a\check{c}} = ((7.111^2 / 2)) \times 0.5 - 8.898 = 3.742 \text{ kNm}$

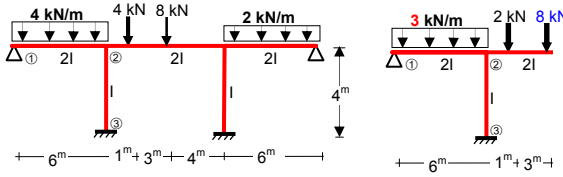
2. açıklıkta  $\max M_{a\check{c}} = ((8^2 / 2)) \times 0.5 - 10.171 = 5.829 \text{ kNm}$

**ÖRNEK 5.8:** Sistemin simetri özelliğini kullanarak **Cross** metoduyla moment alanın çizimi.



**Çözüm:** Verilen bu sistemin çözümü iki aşamada yapılır.

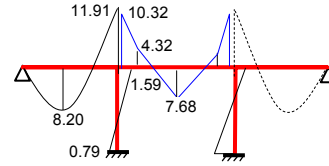
1. Sistem önce herhangi bir simetrik yükleme durumu için çözülür. Burada seçilen simetrik yükleme hali aşağıdaki gibi seçilerek çözümü yapılmıştır. Burada dikkat edilmesi gereken simetri ekseninin kestiği çubuğun **k** değerinin **0.5** katı alınmasıdır ( $k_{22}=0.5 k$ ).



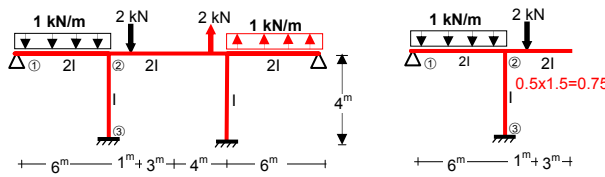
**Ankastrelilik momentleri** (2 - 2' çubuğunun tamamında hesaplanır),

$$M_{21} = \frac{q \times L^2}{8} = \frac{3 \times 6^2}{8} = 13.5 \text{ kNm} \quad -M_{22} = \frac{PL}{8} + \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{8 \times 8}{8} + \frac{2 \times 1 \times 7^2}{8^2} = -9.53 \text{ kNm}$$

Simetrik sistem simetrik yükleme durumu				
Düğüm	②			③
Çubuk uçları	②-①	②-③	②-②'	③-②
Çubuk k değerleri	0.5	0.5	0.25	
Dağıtma sayıları	0.40	0.40	0.20	
Ankastrelilik momentleri	13.5		-9.53	
Düğüm	Dağıtılacak M			
2	13.5-5.53=-7.97	-1.59	-1.59	-0.79
<b>Uç momentleri</b>	<b>11.91</b>	<b>-1.59</b>	<b>-10.32</b>	<b>-0.79</b>



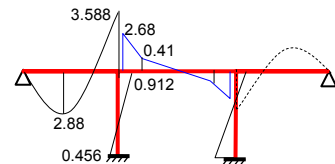
2. Bu aşamada antimetrik yükleme hali için çözülür. Antimetrik yükleme durumu ile simetrik yükleme durumunun toplamları başta verilen yükleme durumunu vermeli. Antimetrik yükleme durumu ve çözümü aşağıda verilmiştir. Burada dikkat edilmesi gereken simetri ekseninin kestiği çubuğun **k** değerinin **1.5** katı alınmasıdır ( $k_{22}=1.5 k$ ).



**Ankastrelilik momentleri** (2 - 2' çubuğunun tamamında hesaplanır),

$$M_{21} = \frac{q \times L^2}{8} = \frac{1 \times 6^2}{8} = 4.5 \text{ tm} \quad -M_{22} = \frac{Pab^2}{L^2} - \frac{Pab^2}{L^2} = -\left[ \frac{2 \times 1 \times 7^2}{8^2} - \frac{2 \times 7 \times 1^2}{8^2} \right] = -1.313 \text{ tm}$$

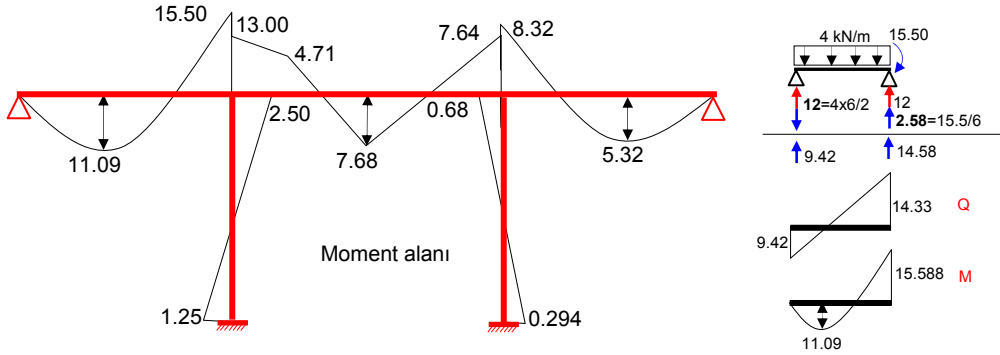
Simetrik sistem antimetrik yükleme durumu				
Düğüm	②			③
Çubuk uçları	②-①	③-②	②-②'	③-②
Çubuk k değerleri	0.5	0.5	0.5x1.5=0.75	
Dağıtma sayıları	0.286	0.286	0.429	
Ankastrelilik momentleri	4.5		-1.313	
Düğüm	Dağıtılacak M			
2	4.5-1.313=-3.187	-0.912	-0.912	-1.367
<b>Uç momentleri</b>	<b>3.588</b>	<b>-0.912</b>	<b>-2.680</b>	<b>-0.456</b>



Çözümü yapılan simetrik sistemin yarısındaki çubuk uç momentlerinin bulunması simetrik ve antimetrik yükleme durumları için bulunan moment değerlerinin işaretleri dikkate alınarak toplanmasıyla bulunur. Örnek olarak ②-②' çubuğunun uç momentleri, simetrik yüklemeye bulunan **-10.32 kNm** değeri ile antimetrik yükleme sonucu bulunan **-2.680 tm** değerinin toplamına eşittir ( $M_{22'} = -10.32 - 2.68 = -13.00 \text{ kNm}$ ).

Çözümü yapılmayan sistemin diğer yarısındaki çubuk uç moment değerleri, simetrik yükleme durumu için yapılan çözümde bulunan çubuk uç momentlerinin **ters işaretli** değerleri ile antimetrik yükleme durumu için bulunan çubuk uç momentlerinin toplamıdır. Örnek olarak ②'-② çubuğunun uç momentleri, simetrik yüklemeye bulunan **-10.32 kNm** değerinin **ters işaretli** olan **+10.32 kNm** moment değeri ile **antimetrik yükleme sonucu bulunan -2.680 kNm** değerinin toplamına eşittir ( $M_{2'2} = 10.32 - 2.68 = 7.64 \text{ kNm}$ ). Benzer şekilde diğer çubuk uç momentleri aşağıdaki gibi bulunur.

Simetrik sistem antimetrik yükleme durumu				
Düğüm	②		③	
Çubuk uçları	②-①	③-②	②-②'	③-②
<b>Uç momentleri(simetrik)</b>	<b>11.91</b>	<b>-1.59</b>	<b>-10.32</b>	<b>-0.79</b>
<b>Uç momentleri (antimetrik)</b>	<b>3.588</b>	<b>-0.912</b>	<b>-2.680</b>	<b>-0.456</b>
<b>Σ</b>	<b>15.50</b>	<b>-2.50</b>	<b>-13.00</b>	<b>-1.25</b>

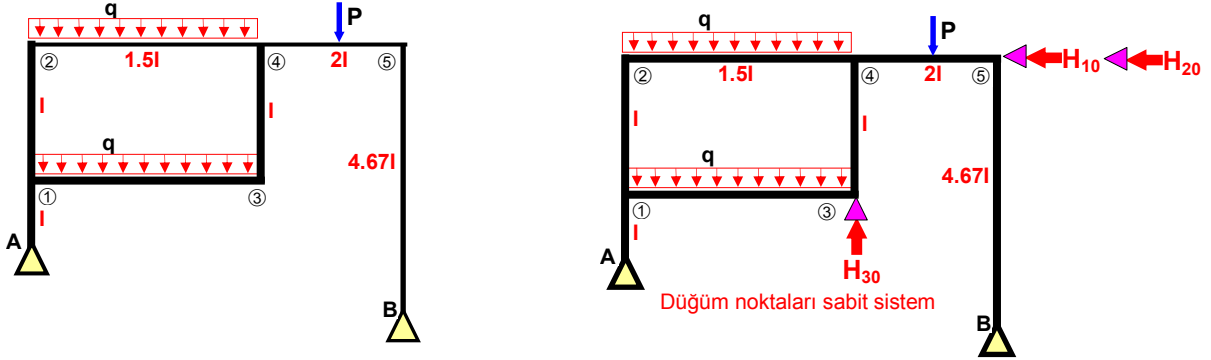


1. açıklıkta  $\max M_{a\check{c}} = ((9.42^2 / 4)) \times 0.5 = 11.09 \text{ kNm}$
1. açıklıkta  $\max M_{a\check{c}} = ((14.58^2 / 4)) \times 0.5 - 15.50 = 11.09 \text{ kNm}$
2. açıklıkta  $\max M_{a\check{c}} = ((8.20 - 2.88) = 5.32 \text{ kNm}$

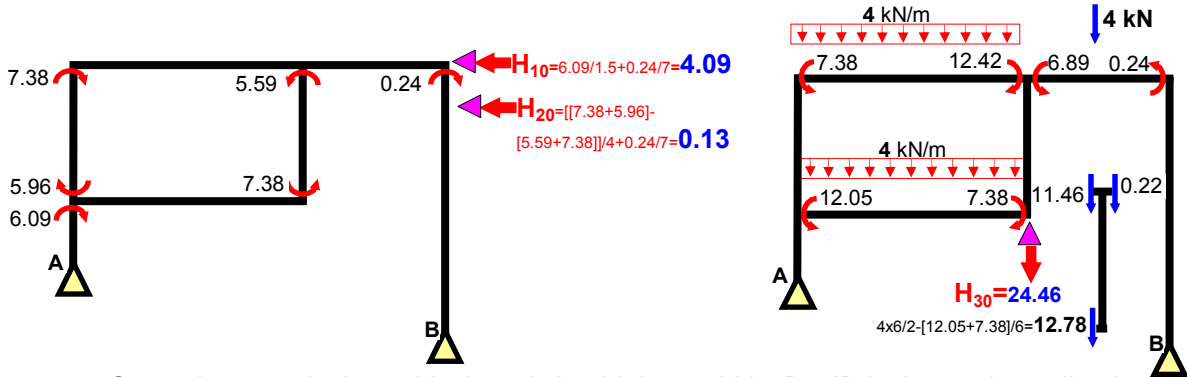
### 5.3. DÜĞÜM NOKTALARI HAREKETLİ ( $\delta \neq 0$ ) SİSTEMLER

Düğüm noktaları hareketli sistemler 4. bölümde açıklanan kriterleri sağlayan sistemlerdir. Bu sistemlerin Cross yöntemi ile aşağıda maddeler halinde açıklanarak çözümü yapılmıştır.

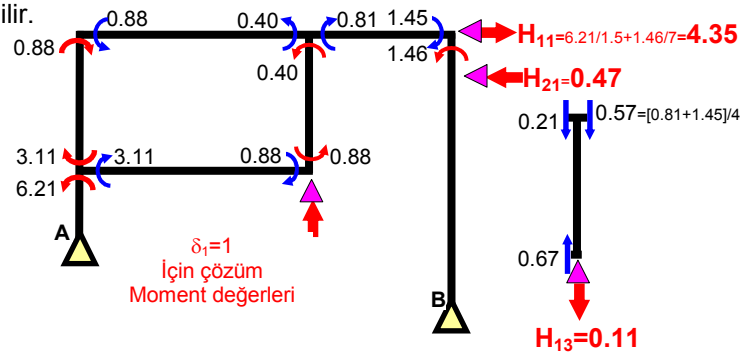
**Cross yöntemi ile düğüm noktaları hareketli sistemlerin çözümü;**



1. Verilen sistem ilk önce yatay ve/veya düşey hareketler  $[H_{10}, H_{20}, H_{30}]$  tutularak düğüm noktaları sabit sistem haline getirilir.
2. Bu düğüm noktaları sabit sistemin dış yüklerden oluşan moment alanı elde edilir.
3. Düğüm noktaları sabit sistemin moment alanı ve dış yüklerin dikkate alınması suretiyle yatay denge yazılarak yatay kat kuvvetleri  $[H_{10}, H_{20}, H_{30}, H_{n0}]$  bulunur.



4. Sonra düğüm noktaları sabit sistemin her bir katına birim  $[\delta_i=1]$  deplasmanlar verilerek moment alanı  $[M_1]$  elde edilir.



5.  $[M_1]$  alanında yatay denge yazılarak yatay kuvvetler  $[H_{11}, H_{12}, H_{13}, \dots, H_{1n}]$  bulunur.
6. Bu işlem her bir deplasman  $[\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n]$  için birim yükleme yapılarak moment değerleri elde edildikten sonra yatay denge yazılarak  $[H_{11}, H_{12}, H_{13}, \dots, H_{1n}]$  değerleri bulunur.

7. Bu işlemler ayrıca aşağıdaki tabloda 3 katlı yapı içinde sırası ile elde edilmiştir.

CROSS METODUNDA DÜĞÜM NOKTALARI HAREKETLİ SİSTEMLERDE YATAY DENGE			
VERİLEN ESAS SİSTEM		SABİT SİSTEM	
		1. KAT YATAY DENGE	
VERİLEN ESAS SİSTEM		2. KAT YATAY DENGE	
		3. KAT YATAY DENGE	

8. Her deplasman ve dış yükler için moment alanlarından elde edilen yatay denge denklemleri sonucu bulunan  $[H_{i1}, H_{i2}, H_{i3}, \dots, H_{in}]$  değerleri kullanılarak,

$$H_{10} + H_{11} \delta_1 + H_{12} \delta_2 + H_{13} \delta_3 = 0$$

$$H_{20} + H_{21} \delta_1 + H_{22} \delta_2 + H_{23} \delta_3 = 0$$

$$H_{30} + H_{31} \delta_1 + H_{32} \delta_2 + H_{33} \delta_3 = 0$$

denklemleri elde edilir.

9. Bu denklem sistemi çözülerek deplasman değerleri  $[\delta]$  bulunur. Bu şekilde  $\delta$ 'ların gerçek değerleri bulunup yerlerine yazılırsa bu  $H$  yatay kuvvetlerin sıfır olduğu görülür.

10. Bulunan  $\delta$  değerleri

$$M_{ij} = M_0 + M_1 \cdot \delta_1 + M_2 \cdot \delta_2 + M_3 \cdot \delta_3 + \dots + M_n \cdot \delta_n$$

bağıntısında yerine yazılarak sonuç moment alanı elde edilir. Sistemin kesme ve eksenel kuvvet değerleri için,

1. Dış yüklerden dolayı düğüm noktaları sabit sistemde oluşan  $[V$  ve  $N]$  alanları çizilir.

2. Sonra düğüm noktaları sabit sistemin her bir katına birim  $[\delta_i=1]$  deplasmanlar verilerek kesme ve eksenel kuvvet alanı  $[V_1 \ N_1]$  elde edilir.

3. Moment için yapılan bütün işlemlerin aynısı bu kesit tesirleri içinde yapılır.

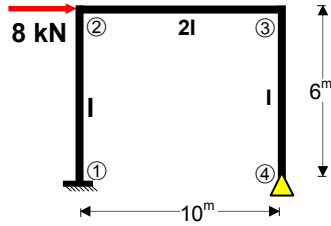
Sistemin kesme ve eksenel kuvvet değerleri moment için yapılan işlemler aynı yapılarak,

$$V_{ij} = V_0 + V_1 \cdot \delta_1 + V_2 \cdot \delta_2 + V_3 \cdot \delta_3 + \dots + V_n \cdot \delta_n$$

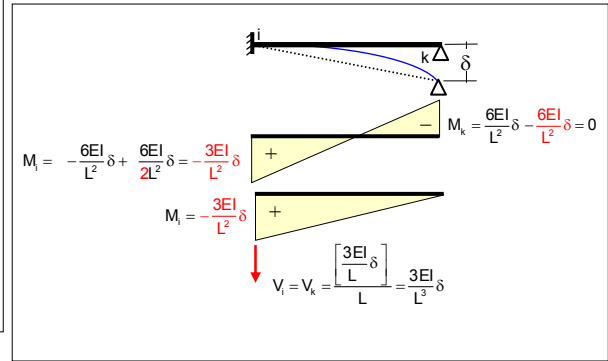
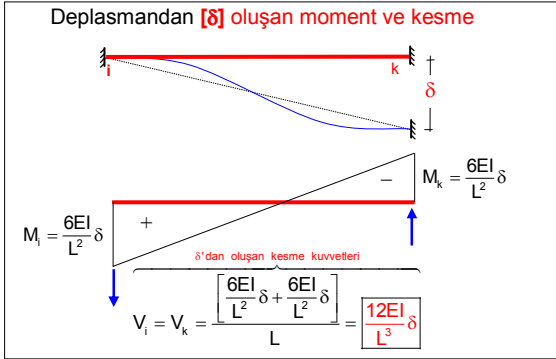
$$N_{ij} = N_0 + N_1 \cdot \delta_1 + N_2 \cdot \delta_2 + N_3 \cdot \delta_3 + \dots + N_n \cdot \delta_n$$

bağıntıları ile elde edilir.

**ÖRNEK 5.9:** Şekilde verilen çerçevenin **CROSS** yöntemiyle moment alanının çizimi.



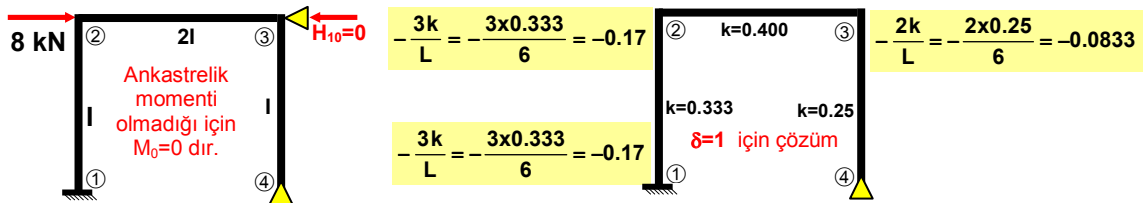
**Çözüm:** Önce sistem düğüm noktaları sabit sistem haline getirilir, sonra  $\delta=1$  için çözüm yapılır.



İki ucu moment taşıyan çubuklarda  $k = \frac{2EI}{L}$  ve

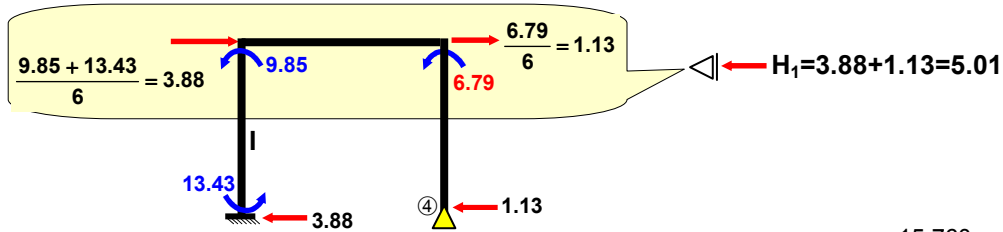
bir ucu moment taşıyan çubuklarda  $k' = \frac{3EI}{2L}$  kısaltması yapılacak olur ise deplasmanlardan dolayı oluşan çubuk uç momentleri;

$$\left. \begin{array}{l} k \text{ çubuklarında } \left\{ \begin{array}{l} \delta = 1 \\ k = \frac{2EI}{L} \end{array} \right\} \text{ olması durumunda } -M_{ik} = -M_{ki} = -\frac{6EI}{L^2} \delta = -\frac{3}{L} \left[ \frac{2EI}{L} \right] \cdot \overset{k \text{ değeri}}{\delta} = -\frac{3k}{L} \\ k' \text{ çubuklarında } \left\{ \begin{array}{l} \delta = 1 \\ k = \frac{3EI}{2L} \end{array} \right\} \text{ olması durumunda } M_{ik} = \frac{3EI}{L^2} \delta = -\frac{4}{3L} \left[ \frac{3EI}{2L} \right] \cdot \overset{k' \text{ değeri}}{\delta} = -\frac{2k}{L} \end{array} \right\} \text{ OLUR}$$



Açıklıkta yük olmadığı için (ankastrelik momenti sıfır) dış yüklere göre çözüm yapılmaz ve  $\delta=1$  için çözüm yapılarak yatay deplasman bulunur.

$\delta=1$ için çözüm					
Düğüm		①	②		③
Çubuk uçları		①-②	②-①	②-③	③-② ③-④
Çubuk k değerleri		0.333	0.333	0.400	0.400 0.250
Dağıtma sayıları			0.454	0.546	0.615 0.385
Ankastrelik M [100 katı]		-17	-17		-8.33
Düğüm	Dağıtılabacak M				
2	-17	3.86	7.72	9.28	4.64
3	-8.33+4.64=-3.69			1.14	2.27 1.42
2	1.14	-0.26	-0.52	-0.62	-0.31
3	-0.31			0.10	0.19 0.12
2	0.10	-0.03	-0.05	-0.055	
<b>Uç momentleri</b>		<b>-13.43</b>	<b>-9.85</b>	<b>9.85</b>	<b>6.79</b> <b>-6.79</b>



$$H_{11} \delta - H_0 = 0 \quad [3.88 + 1.13] \delta - 8 = 0$$

$$\delta = \frac{8}{5.01} = 1.60$$

### Çubuk uç momentleri

$$M_{12} = 1.60 \times (-13.43) = -21.488 \text{ tm}$$

$$M_{21} = 1.60 \times (-9.85) = -15.76 \text{ tm}$$

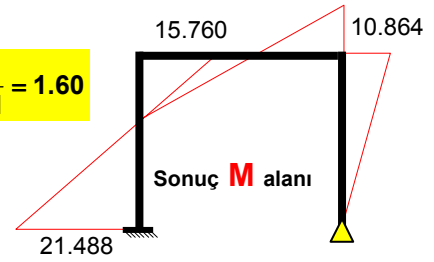
$$M_{23} = 1.60 \times (9.85) = 15.76 \text{ tm}$$

$$M_{32} = 1.60 \times (6.79) = 10.864 \text{ tm}$$

$$M_{34} = 1.60 \times (-6.79) = -10.864 \text{ tm}$$

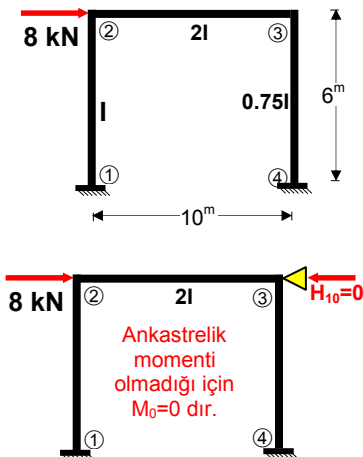
Not:  $[3.88 + 1.13] \delta / 100 - 8 = 0 \quad \delta = 800 / 5.01 = 159.68$

$$M_{34} = 159.68 \times (-6.79 / 100) = -10.864 \text{ tm} \text{ AYNISI}$$



**ÖRNEK 5.10:** Şekilde verilen çerçevenin **CROSS** yöntemiyle moment alanının çizimi.

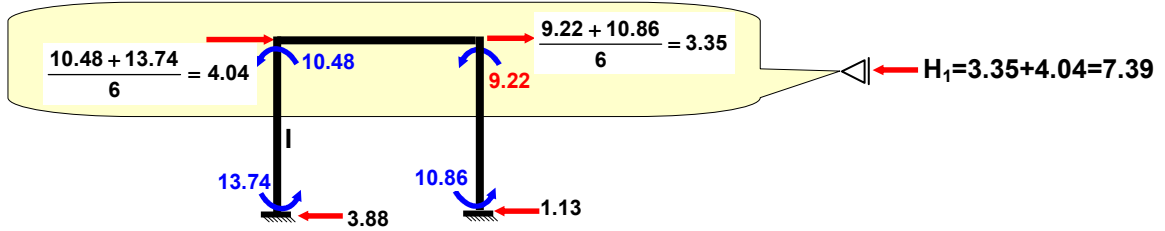
[④ mesnedinin ankastre olması ile mafsallı olması durumundaki değişim gözlenir]



$$\begin{aligned} \frac{3k}{L} &= \frac{3 \times 0.333}{6} = -0.17 & \frac{3k}{L} &= \frac{3 \times 0.25}{6} = -0.125 \\ \frac{3k}{L} &= \frac{3 \times 0.333}{6} = -0.17 & \frac{3k}{L} &= \frac{3 \times 0.25}{6} = -0.125 \end{aligned}$$

Açıklıkta yük olmadığı için (ankastrelik momenti sıfır) dış yüklere göre çözüm yapılmaz ve  $\delta=1$  için çözüm yapılarak yatay deplasman bulunur.

$\delta=1$ için çözüm							
Düğüm		①	②	③	④		
Çubuk uçları		①-②	②-①	②-③	③-②	③-④	④-③
Çubuk k değerleri		0.333	0.333	0.400	0.400	0.250	
Dağıtma sayıları			0.454	0.546	0.615	0.385	
Ankastrelik M (10 katı)		-17	-17			-12.5	-12.5
Düğüm	Dağıtılabacak M						
2	-17	3.86	7.72	9.28	4.64		
3	-12.5+4.64=-7.86			2.42	4.83	3.03	1.515
2	2.42	-0.55	-1.10	-1.32	-0.66		
3	0.66			0.21	0.41	0.25	0.125
2	-0.21	-0.05	-0.10	-0.15			
Uç momentleri		-13.74	-10.48	10.48	9.22	-9.22	-10.86



$$H_{11} \delta - H_0 = 0 \quad (4.04 + 3.35) \delta - 8 = 0 \quad \delta = \frac{8}{7.39} = 1.083$$

**Çubuk uç momentleri**  $M_{12} = 1.083 \times (-13.74) = -14.88 \text{ kNm}$

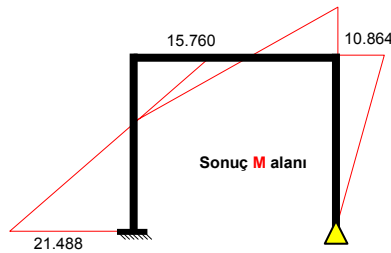
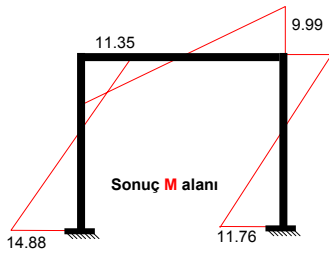
$$M_{21} = 1.083 \times (-10.48) = -11.35 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 1.083 \times (10.48) = 11.35 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = 1.083 \times (9.22) = 9.99 \text{ kNm}$$

$$M_{34} = 1.083 \times (-9.22) = -9.99 \text{ kNm}$$

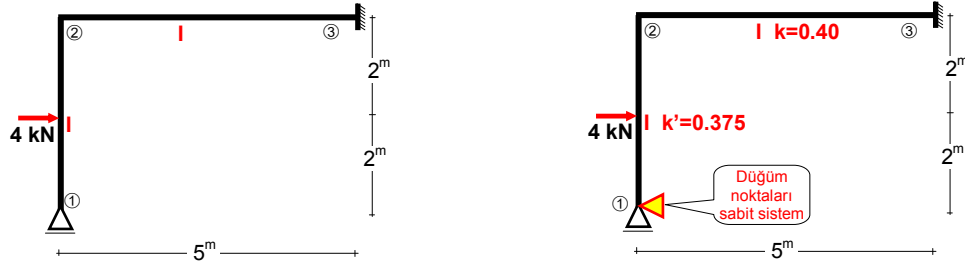
$$M_{43} = 1.083 \times (-10.86) = -11.76 \text{ kNm}$$



④ mesnedinin ankastre olması ile mafsallı olması durumunda momentlerdeki değişim yukarıdaki moment alanlarının karşılaştırılması sonucu görülebilir.

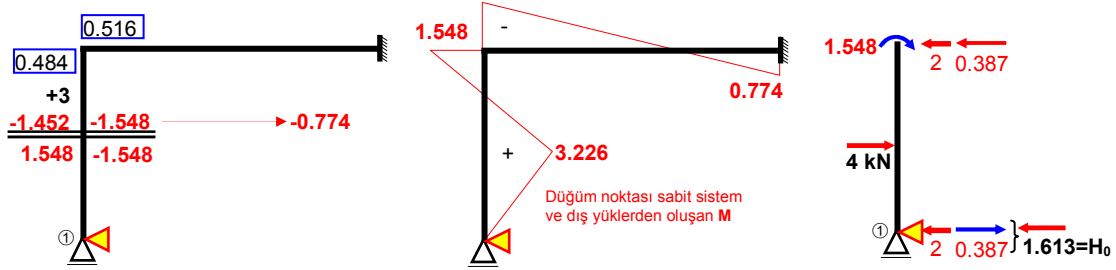


**ÖRNEK 5.11:** Şekilde verilen çerçevenin **CROSS** yöntemiyle moment alanının çizimi.



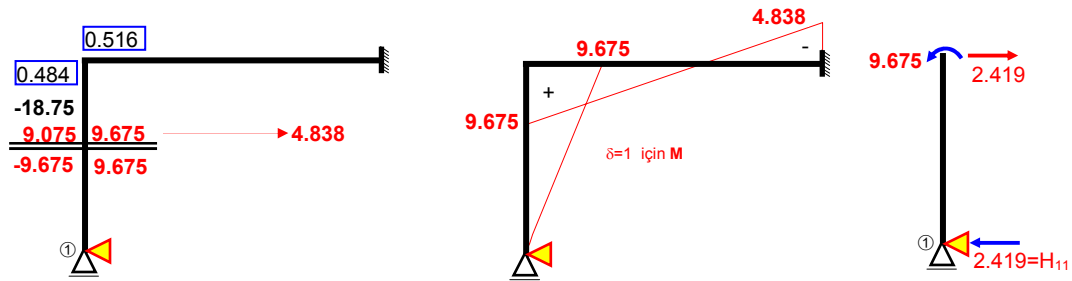
**Çözüm:** Sistem önce düğüm noktaları sabit sistem haline getirilerek dış yükler altında çözümlenerek yatay denge yazılır ve  $[H_0]$  bulunur.

$$\text{Ankastrelik momenti } M_{21} = \frac{3}{16} 4 \times 4 = 3 \text{ kNm}$$



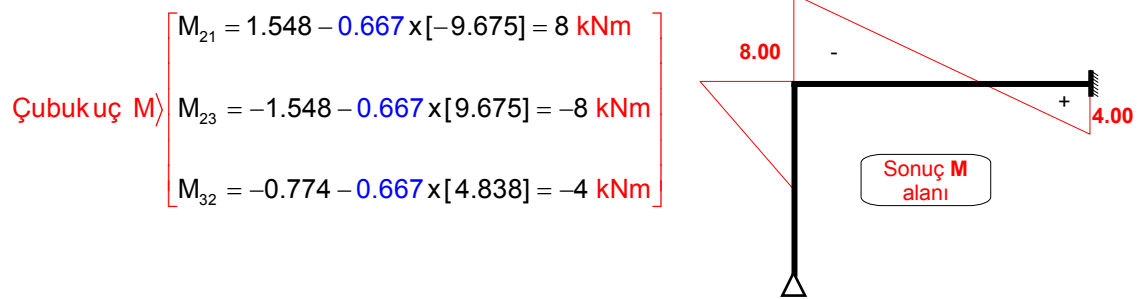
Bundan sonra  $\delta=1$  için çözüm yapılarak kolonda yatay denge yazılarak  $[H_{11}]$  bulunur.

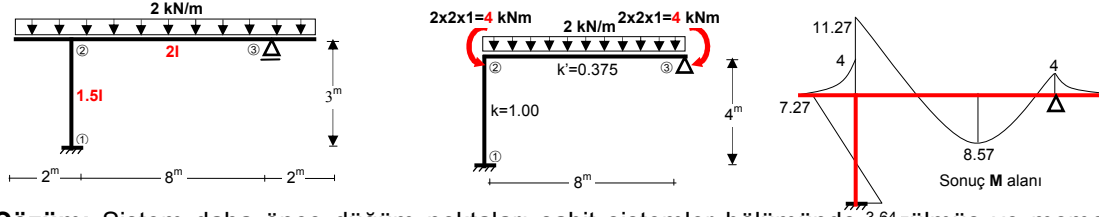
$$\text{Ankastrelik momenti } M_{21} = -\frac{2 \times 0.375}{4} = -0.1875 \quad \text{100 katalınır } M_{21} = -18.75$$



Bulunan bu değerler kullanılarak aşağıdaki şekilde yatay deplasman  $[\delta]$  bulunur.

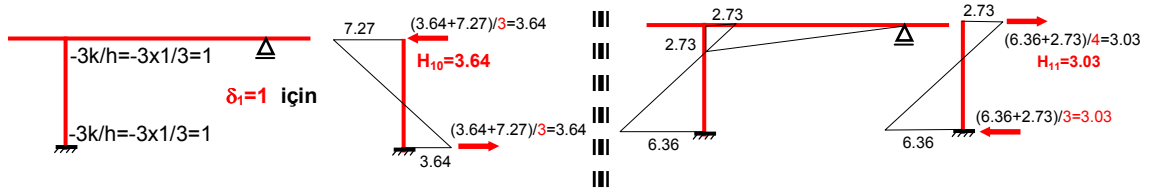
$$H_{11} \delta + H_0 = 0 \quad 2.419 \delta + 1.613 = 0 \quad \delta = -\frac{1.613}{2.419} = -0.667$$



**ÖRNEK 5.11:** Verilen kirişin moment alanını **Cross** metoduyla çiziniz. ( $2I=\text{sabit}$ )

**Çözüm:** Sistem daha önce düğüm noktaları sabit sistemler bölümünde çözülmüş ve moment alanı aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

Bu moment alanından yatay  $H_{10}$  kuvveti aşağıdaki şekilde bulunur. Daha sonra yatay birim yükleme için çözüm yapılarak yatay  $H_{11}$  kuvveti bulunur ve yatay deplasman değeri  $\delta$  bulunarak  $M$  alanı elde edilir.



Düğüm	①	②		③	
Çubuk uçları	①-②	konsol	②-①	②-③	③-② konsol
Çubukların $k$ değerleri			<b>1.00</b>	<b>0.357</b>	
Dağıtma sayıları			<b>0.727</b>	<b>0.273</b>	
Ankastrelik momentleri	<b>-10</b>		<b>-10</b>		
Düğüm Dağıtılacak moment					
<b>2</b>	<b>-10</b>	<b>3.64</b>	<b>7.27</b>	<b>2.73</b>	
		<b>6.36</b>	<b>-2.73</b>	<b>2.73</b>	

$$H_{11}\delta - H_{10} = 0$$

$$3.03\delta - 3.64 = 0$$

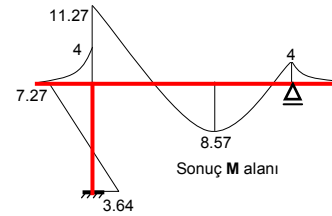
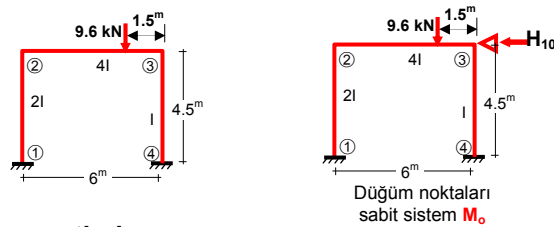
$$\delta = 1.201$$

$$M_{12} = 3.64 - 1.201 \times 6.36 = -4.01 \text{ kNm,}$$

$$M_{21} = 7.27 - 1.201 \times 2.73 = 3.99 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = -11.27 + 1.201 \times 2.73 = -7.99 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = 4 + 1.201 \times 0 = 4.00 \text{ kNm}$$

**ÖRNEK 5.12:** Çerçevenin moment alanını **CROSS** metodunu kullanarak çizimi.

**Ankastrelik momentleri**

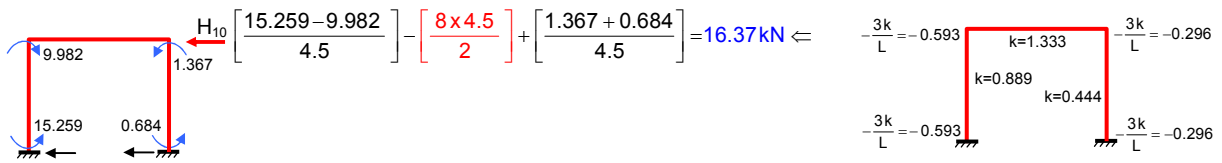
$$M_{12} = -8 \times 4.5^2 / 12 = -13.5 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = 8 \times 4.5^2 / 12 = 13.5 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = -9.6 \times 4.5 \times 1.5^2 / 6^2 = -2.70 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = -9.6 \times 1.5 \times 4.5^2 / 6^2 = 8.10 \text{ kNm}$$

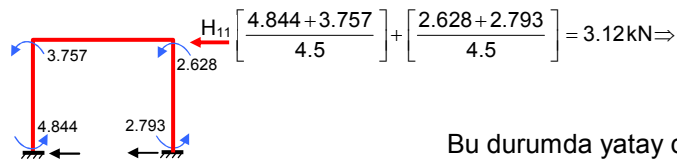
Düğüm		①	②		③	④	
Çubuk uçları		①-②	②-①	②-③	③-②	③-④	④-③
Dağıtma sayıları			0.40	0.60	0.75	0.25	
Ankastrelik momentleri		-13.5	13.5	-2.70	8.10		
Düğüm	Dağıtılabacak moment						
2	(13.5-2.7)=-10.8	-2.16	<u>-4.32</u>	<u>-6.48</u>	-3.24		
3	(8.10-3.24)=-4.84			-1.823	<u>-3.645</u>	<u>-1.215</u>	-0.608
2	-1.823	0.365	<u>0.729</u>	<u>1.094</u>	0.547		
3	0.547			-0.205	<u>-0.410</u>	<u>-0.137</u>	-0.068
2	-0.205	0.041	<u>0.082</u>	<u>0.123</u>	0.062		
3	0.062			0.023	<u>-0.046</u>	<u>-0.015</u>	-0.008
2	0.023	-0.005	<u>-0.009</u>	<u>-0.014</u>			
<b>Uç momentleri</b>		<b>-15.259</b>	<b>9.982</b>	<b>-9.982</b>	<b>1.368</b>	<b>-1.367</b>	<b>-0.684</b>



Bu durumda yatay denge yazılırsa,  $16.37 \leftarrow + H_{10} \leftarrow = 0$   $H_{10} = -16.37$

$\delta_1$  için çözüm.

$\delta=1$ için çözüm							
Düğüm		①	②		③	④	
Çubuk uçları		①-②	②-①	②-③	③-②	③-④	④-③
Dağıtma sayıları			0.40	0.60	0.75	0.25	
Ankastrelik momentleri		-5.93	-5.93		-2.96	-2.96	
Düğüm	Dağıtılabacak moment						
2	-5.93	1.186	2.372	3.558	1.779		
3	(1.779-2.96)=-1.181			0.443	0.886	0.295	0.148
2	0.443	-0.089	-0.177	-0.266	<u>-0.133</u>		
3	-0.133			0.05	0.100	0.033	0.017
2	0.05	-0.010	-0.020	-0.030	<u>-0.015</u>		
3	0.015			0.006	0.011	0.004	0.002
2	0.006	-0.001	-0.002	-0.004			
<b>Uç momentleri</b>		<b>-4.844</b>	<b>-3.757</b>	<b>3.757</b>	<b>2.628</b>	<b>-2.628</b>	<b>-2.793</b>



Bu durumda yatay denge yazılırsa,  $3.12 \Rightarrow -H_1 = 0$   $H_1 = 3.12 \leftarrow$

$$\delta = H_{10} / H_1 = 16.37 / 3.12 = 5.254$$

$$M = M_0 + M_1 \times \delta$$

$$M_{12} = -15.259 - 5.254 \times 4.844 = -40.709 \text{ kNm}$$

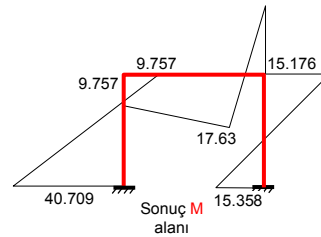
$$M_{21} = 9.982 - 5.254 \times 3.757 = -9.757 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = -9.982 + 5.254 \times 3.757 = 9.757 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = 1.368 + 5.254 \times 2.628 = 15.176 \text{ kNm}$$

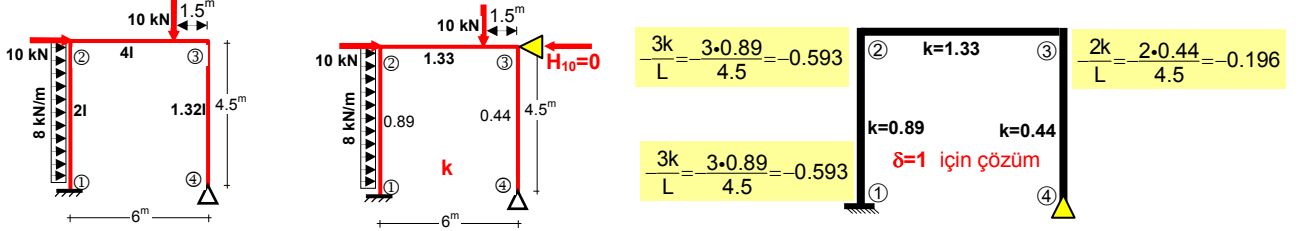
$$M_{34} = -1.367 - 5.254 \times 2.628 = -15.176 \text{ kNm}$$

$$M_{43} = -0.684 - 5.254 \times 2.793 = -15.358 \text{ kNm}$$



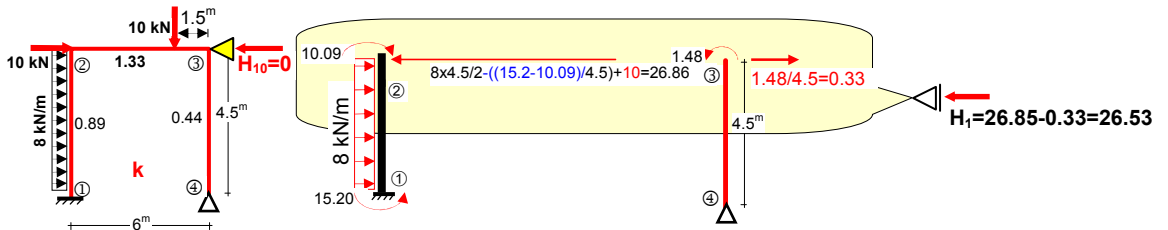
Düğüm	①	②		③		④
Çubuk uçları	①-②	②-①	②-③	③-②	③-④	④-③
Dış yüklerden uç momentleri ( $M_0$ )	-15.259	9.982	-9.982	1.368	-1.367	0.684
$\delta_1=1$ uç momentleri ( $M_1$ )	-4.844	-3.757	3.757	2.628	-2.628	-2.793

### ÖRNEK 11: Verilen çerçevenin cross M



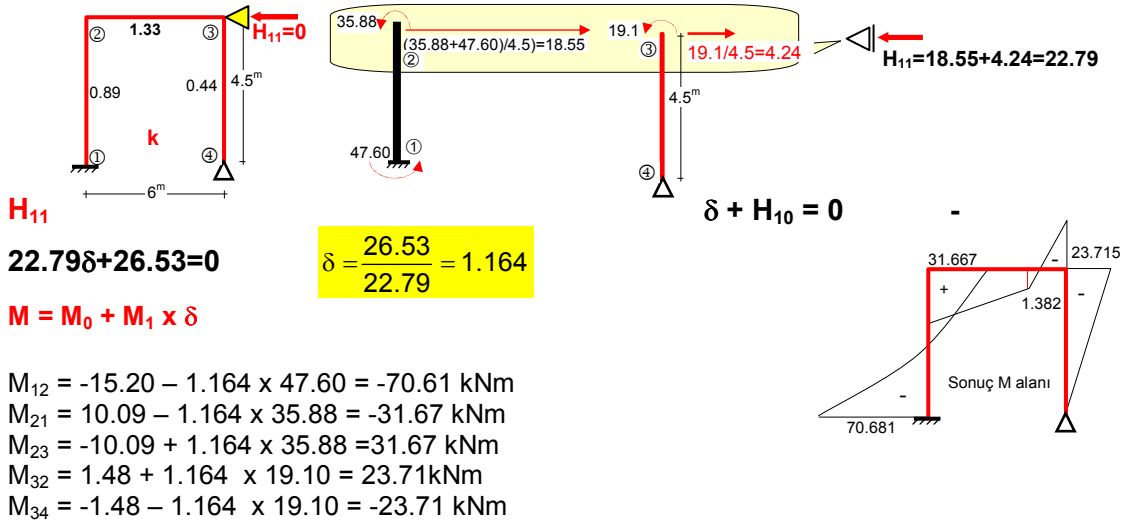
$$\text{Ankastrelik } M_{-M_{12}} = M_{21} = \frac{8 \times 4.5^2}{12} = 13.5 \text{ kNm} \quad -M_{23} = \frac{10 \times 4.5 \times 1.5^2}{6 \times 6} = -2.81 \text{ kNm} \quad M_{32} = \frac{10 \times 4.5^2 \times 1.5}{6 \times 6} = 8.44 \text{ kNm}$$

1. DIŞ YÜKLER İÇİN ÇÖZÜM						
Düğüm		①	②		③	
Çubuk uçları		①-②	②-①	②-③	③-②	③-④
Çubuk k değerleri		0.89	0.89	1.33	1.33	0.44
Dağıtma sayıları			0.4	0.6	0.75	0.25
Ankastrelik M		-13.5	13.5	-2.81	8.44	
Düğüm	Dağıtılabacak M					
2	13.5-2.81=10.69-	-2.14	0.4x10.69=-4.28	0.6x10.69=-6.41	6.41x0.5=-3.21	
3	8.44-3.21=5.2-			3.9x0.5=-1.95	0.75x5.2=-3.9	0.25x5.2=-1.33
2	1.95+	0.39	0.78	1.17	0.59	
3	0.59-			-0.22	-0.44	-0.15
2	0.22+	0.05	0.09	0.13		
Uç momentleri		-15.20	10.09	-10.09	1.48	-1.48



Not: 10 kN yatay kuvvet hesaplara katılmadığı için yatay dengede diğer kuvvetlerin tesisi yönünde hesaba katılır.

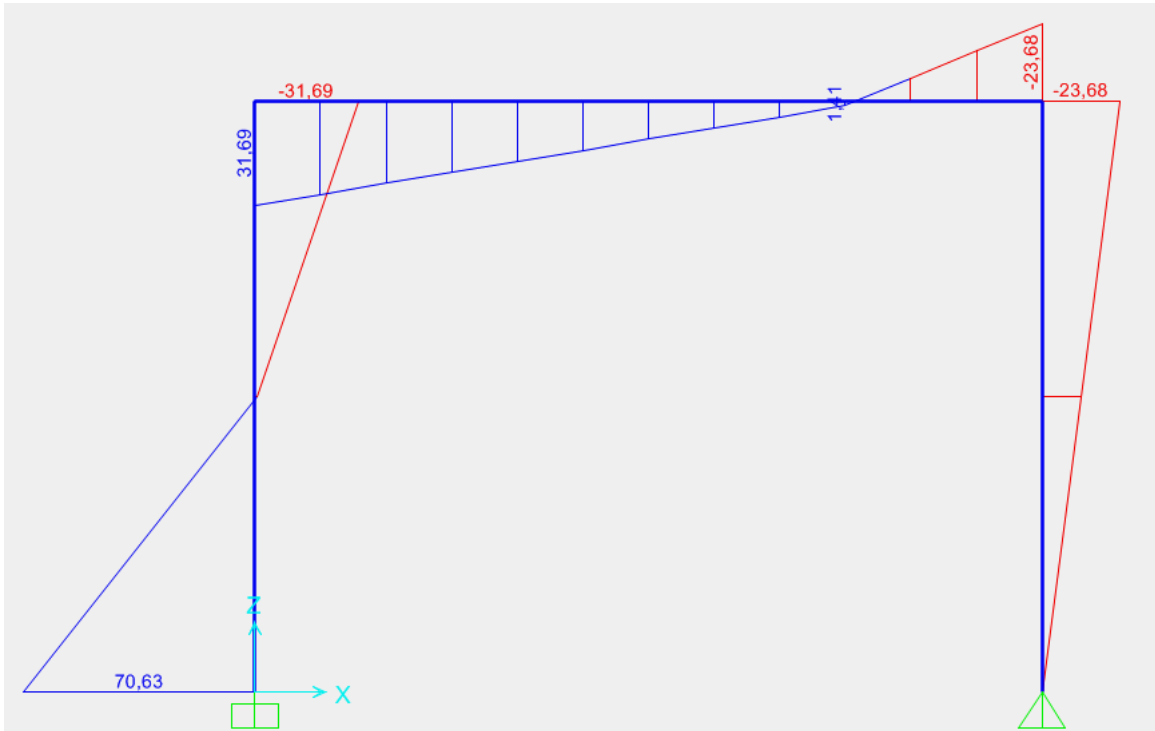
$\delta=1$ için çözüm						
Düğüm		①	②		③	
Çubuk uçları		①-②	②-①	②-③	③-②	③-④
Çubuk k değerleri		0.89	0.89	1.33	1.33	0.44
Dağıtma sayıları			0.4	0.6	0.75	0.25
Ankastrelik M		-59.3	-59.3			-19.6
Düğüm	Dağıtılabacak M					
2	-59.3	11.86	0.4x59.3=23.72	0.6x59.3=35.58	35.58x0.5=17.79	
3	17.79-19.6=-1.81			1.36x0.5=0.68	0.75x1.81=1.36	0.25x1.81=0.45
2	0.68-	-0.14	-0.27	-0.41	-0.20	
3	0.20+			0.08	0.15	0.05
2	0.08-	-0.02	-0.03	-0.05		
Uç momentleri		-47.60	-35.88	35.88	19.10	-19.10



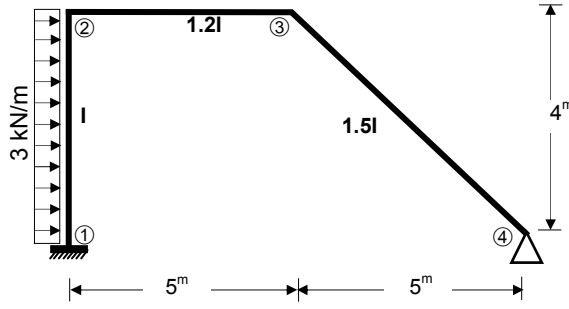
$H_{11} \delta + H_{10} = 0 \quad -22.79(\delta/100) + 26.53 = 0 \quad \delta = \frac{26.53 \cdot 100}{22.79} = 116.41$

$M = M_0 + M_1 \times \delta$

$M_{12} = -15.20 - 116.41 \times (47.60/100) = -70.61 \text{ kNm}$   
 $M_{21} = 10.09 - 116.41 \times (35.88/100) = -31.67 \text{ kNm}$   
 $M_{23} = -10.09 + 116.41 \times (35.88/100) = 31.67 \text{ kNm}$   
 $M_{32} = 1.48 + 116.41 \times (19.10/100) = 23.71 \text{ kNm}$   
 $M_{34} = -1.48 - 116.41 \times (19.10/100) = -23.71 \text{ kNm}$



**ÖRNEK 5.13:** Şekildeki çerçevenin moment alanının **Cross** Yöntemiyle belirlenmesi.

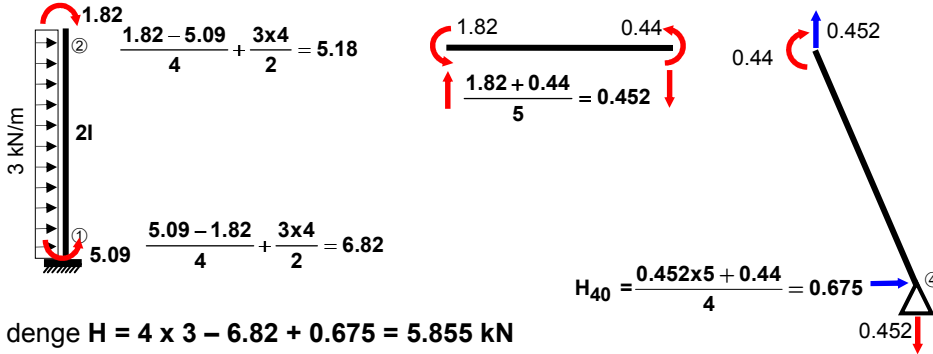


**Ankastrelik momentleri**

$$M_{21} = -M_{12} = \frac{3 \times 4^2}{12} = 4 \text{ tm}$$

Düğüm		①	②		③	
Çubuk uçları		①-②	②-①	②-③	③-②	③-④
Dağıtma sayıları			<b>0.51</b>	<b>0.49</b>	<b>0.58</b>	<b>0.42</b>
Ankastrelik momentleri		<b>-4</b>	<b>4</b>			
Düğüm	Dağıtılabacak moment					
2	-4	-1.02	<b>-2.04</b>	-1.96	-0.98	
3	0.98			0.28	0.57	0.41
3	-0.28	-0.07	<b>-0.14</b>	-0.14	<b>-0.07</b>	
2	0.07			0.02	0.04	0.03
Uç momentleri		<b>-5.09</b>	<b>1.82</b>	<b>-1.82</b>	<b>-0.44</b>	<b>0.44</b>

Bulunan uç momentlerinden oluşan H yatay kuvveti aşağıdaki şekilde hesaplanır.

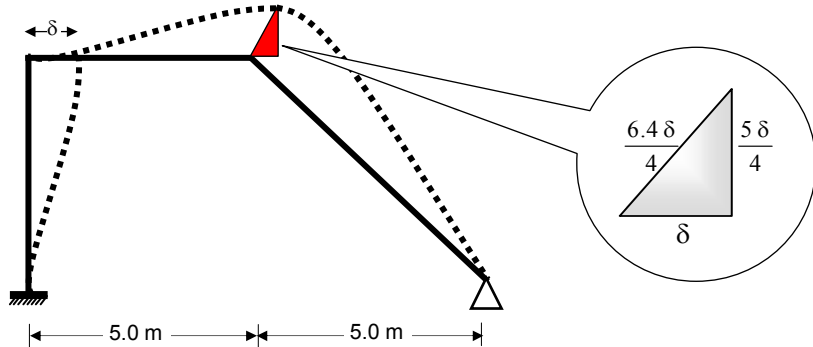


Yatay denge  $H = 4 \times 3 - 6.82 + 0.675 = 5.855 \text{ kN}$

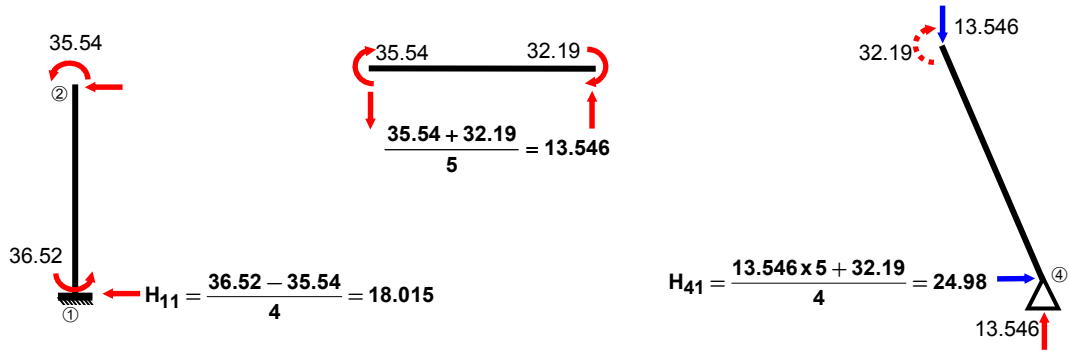
Ankastrelik momentleri, (iki ucu ankastre çubuklarda 6 değerlerinde 3 ve 100 katı alınmıştır)

$$M_{12} = -\frac{6 \cdot 100}{4^2} \delta = -37.5 \delta = -37.5 \quad M_{23} = \frac{6 \cdot 1.2 \cdot 100}{5^2} \times \frac{5 \delta}{4} = 36 \delta = 36 \quad M_{34} = -\frac{3 \cdot 1.5 \cdot 100}{5^2} \times \frac{6.4 \delta}{4} = -28.8 \delta = -28.8$$

Sistemin birim yatay yükleme durumunda şekil değiştirme hali, uç momentleri ve yatay denge aşağıdaki gibi elde edilir.



Düğüm		①	②		③	
Çubuk uçları		①-②	②-①	②-③	③-②	③-④
Dağıtma sayıları			0.51	0.49	0.58	0.42
Ankastrelik momentleri		-37.5	-37.5	36	36	-28.8
Düğüm	Dağıtılabacak moment					
3	-[36-28.8]=-7.2			-2.09	-4.18	-3.02
3	-[36-37.5-2.09]=3.59	0.92	1.83	1.76	0.88	
3	-0.88			-0.25	-0.51	-0.37
2	0.25	0.06	0.13	0.12		
Uç momentleri		-36.52	-35.54	35.54	32.19	-32.19



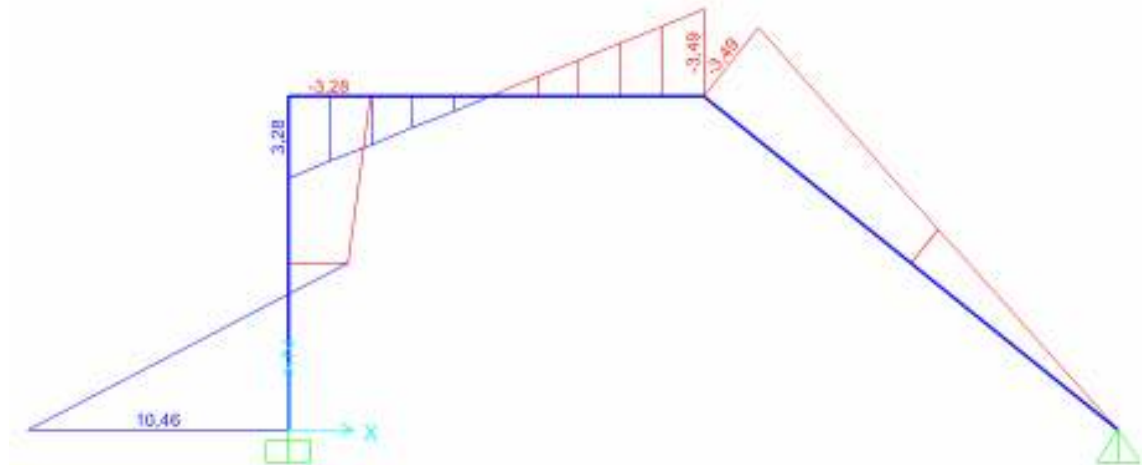
Yatay denge  $H = 18.015 + 24.98 = 42.995 \text{ kN} \leftarrow H_{11} \delta - H_0 = 0 \quad -(42.995) \delta + 5.855 = 0$

$$\delta = \frac{5.855}{42.995} = 0.136$$

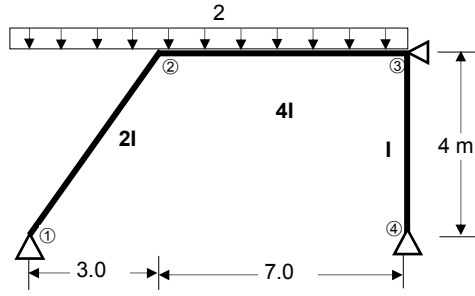
**Çubuk uç momentleri** :  $M_{12} = 0.136 \times (-36.52) - 5.09 = -10.06 \text{ kNm}$

$M_{21} = 0.136 \times (-35.54) + 1.82 = -3.01 \text{ kNm}$        $M_{23} = 0.136 \times (35.54) - 1.82 = 3.01 \text{ kNm}$

$M_{32} = 0.136 \times (32.19) - 0.44 = 3.94 \text{ kNm}$        $M_{34} = 0.136 \times (-32.19) + 0.44 = -3.94 \text{ kNm}$



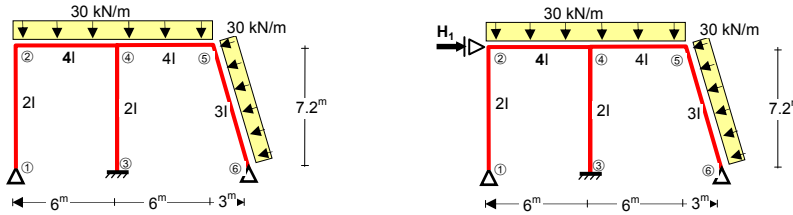
ÖRNEK 5.14: Şekildeki çerçevenin moment alanının **Cross** metoduyla bulunması.



Ankastrelik momentleri  $M_{21} = \frac{2 \times 3^2}{8} = 2.25 \text{ tm}$   $-M_{23} = \frac{2 \times 7^2}{12} = -8.167 \text{ tm}$

Düğüm		②		③	
Çubuk uçları		②-①	②-③	③-②	③-④
Çubukların k değerleri		0.60	1.143	1.143	0.375
Dağıtma sayıları		0.344	0.656	0.753	0.247
Ankastrelik momentleri		2.25	-8.167	8.167	
Düğüm	Dağıtılacak moment				
3	-8.167		-3.075	-6.150	-2.017
2	-8.167-3.075+2.25=8.992	3.093	5.899	2.949	
3	-2.949		-1.110	-2.221	-0.728
2	1.11	0.382	0.728	0.364	
3	-0.364		-0.137	-0.274	-0.09
2	0.137	0.047	0.090	0.045	
3	-0.045			-0.034	-0.011
Uç momentleri		5.772	5.772	2.846	-2.846

ÖRNEK 5.15: Şekildeki [düğüm noktaları sabit] sistemin moment alanının ve  $H_1$  kuvvetinin bulunması.

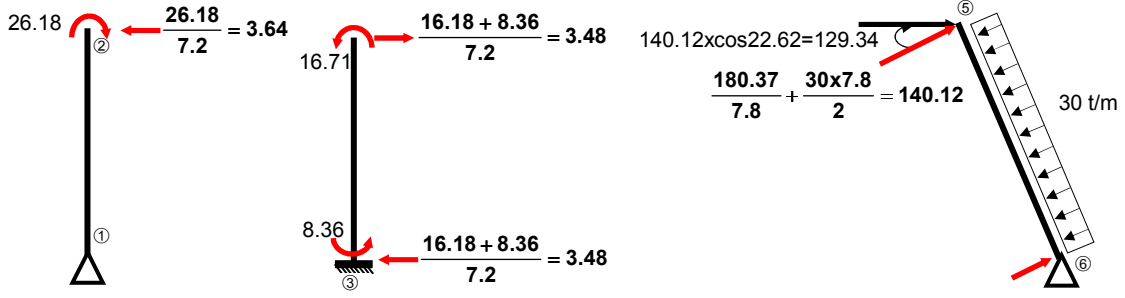


Ankastrelik momentleri  $-M_{24} = M_{42} = -M_{45} = M_{54} = \frac{30 \times 6^2}{12} = 90 \text{ kNm}$   $-M_{56} = \frac{30 \times ((3^2 + 7.2^2)^{0.5})^2}{8} = 228.15 \text{ kNm}$

Genel durum için çözüm							
Düğüm		③	②		④		⑤
Çubuk uçları		③-④	②-①	②-④	④-②	④-③	④-⑤
Dağıtma sayıları			0.238	0.762	0.414	0.172	0.414
Ankastrelik momentleri			-90	90		-90	90
Düğüm	Dağıtılacak M						
4	-228.15+90=-138.15					48.21	96.43
2	-90		21.42	68.58	34.29		
3	90-90+34.29+48.21=82.5	-7.1		-17.08	-34.16	-14.19	-34.15
4	-17.08					5.96	11.92
2			4.06	13.02	6.51		
3	6.51+5.96=12.47	-1.08		-2.58	-5.16	-2.15	-5.16
2	-2.58		0.61	1.97	0.98		
4	-2.58					0.90	1.80
3	1.88	-0.16		-0.39	-0.78	-0.32	-0.78
2	-0.39		0.09	0.30	0.15		
4						0.14	0.27
3	0.29	-0.06			-0.12	-0.05	-0.12
Uç momentleri		-8.36	26.18	-26.18	91.71	-16.71	-75.00
							180.37
							-180.37

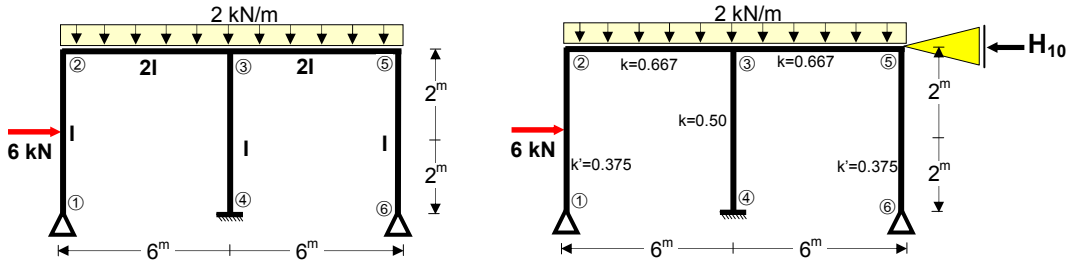


Bulunan çubuk uç momentlerinden yatay denge aşağıdaki şekilde yazılır.



Yatay denge  $H = -3.64 + 3.48 + 129.34 = 129.185 \text{ t} \Rightarrow$

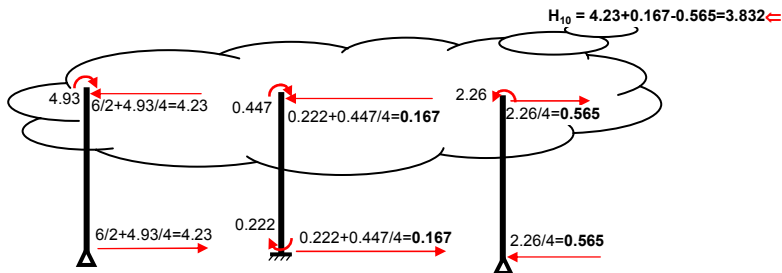
**ÖRNEK 5.16:** Şekilde verilen sistemin moment alanının **CROSS** yöntemiyle elde edilmesi.



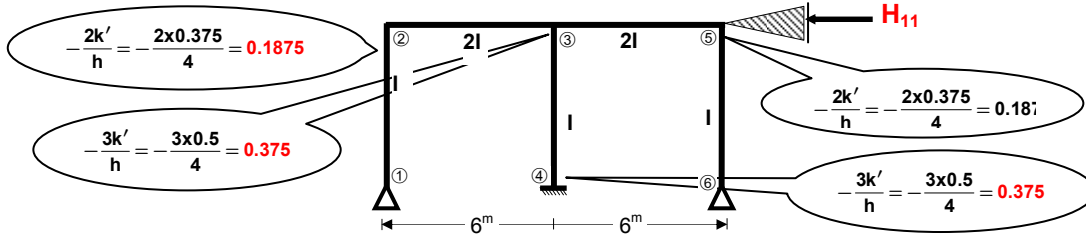
**Çözüm:** İlk önce sistem aşağıdaki şekilde düğüm noktaları sabit hale getirilir ve buna göre çözüm yapılarak bu mesnedin yatay tepki kuvveti ( $H_{10}$ ) bulunur.

GENEL DURUM İÇİN ÇÖZÜM ( $\delta = 0$ )								
Düğüm	②		③			⑤		
Çubuk	②-①	②-③	③-②	③-④	④-③	③-⑤	⑤-③	⑤-⑥
Dağıtma sayıları	0.36	0.64	0.364	0.272		0.364	0.64	0.36
Ankastrelik momentleri	4.5	-6	6			-6	6	
Düğüm	Dağıtılacak M							
5	6					-1.92	<b>-3.84</b>	<b>-2.16</b>
3	-1.92		0.350	<b>0.700</b>	0.26	<b>0.70</b>	0.35	
2	4.5 + 0.35 - 6 = -1.15	<b>0.41</b>	<b>0.740</b>	0.370				
3	<b>0.37</b>		-0.070	<b>-0.135</b>	-0.05	<b>-0.135</b>	-0.07	
2	-0.07	<b>0.02</b>	<b>0.050</b>					
5	0.35 - 0.07 = 0.28					-0.09	<b>-0.180</b>	<b>-0.10</b>
3	-0.09		<b>0.033</b>	<b>0.025</b>	0.012	<b>0.033</b>		
<b>Uç momentleri</b>	<b>4.93</b>	<b>-4.93</b>	<b>6.968</b>	<b>0.447</b>	<b>0.222</b>	<b>-7.412</b>	<b>2.260</b>	<b>-2.260</b>

Bulunan uç momentlerinden dolayı yatay denge yazılarak sistemi düğüm noktaları sabit hale getirmek için çerçevenin üst kısmına konan mesnedin yatay tepkisi aşağıdaki şekilde bulunur.

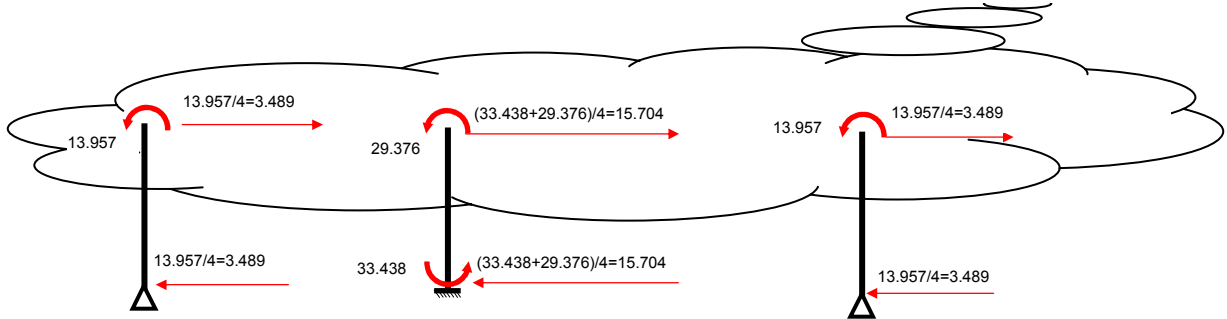


İkinci adım olarak da kolonların rijitliklerine göre birim deplasman verildiğinde oluşan momentlere göre sistem bir defa daha çözümlenerek yatay mesnet tepkisi ( $H_{11}$ ) bulunur.



<b><math>\delta = 1</math> İÇİN ÇÖZÜM</b>								
Düğüm	②		③			⑤		
Çubuk	②-①	②-③	③-②	③-④	④-③	③-⑤	⑤-③	⑤-⑥
Dağıtma sayıları	0.36	0.64	0.364	0.272		0.364	0.64	0.36
Ankastrelik M (100 katı)	-18.75			-37.50	-37.50			-18.75
Düğüm	Dağıtılacak M							
3	-37.50		6.825	<u>13.65</u>	<u>10.200</u>	5.100	<u>13.65</u>	6.825
2	6.825-18.75=-11.925	<u>4.293</u>	<u>7.632</u>	3.816				
5	6.90-18.75=-11.925					3.816	<u>7.632</u>	<u>4.293</u>
3	3.816+3.816=7.632		-1.389	<u>-2.778</u>	<u>-2.076</u>	-1.038	<u>-2.778</u>	-1.389
2-5	-1.389	<u>0.500</u>	<u>0.889</u>				<u>0.889</u>	<u>0.500</u>
<b>Uç momentleri</b>	<b>-13.957</b>	<b>13.957</b>	<b>14.688</b>	<b>-29.376</b>	<b>-33.438</b>	<b>14.688</b>	<b>13.957</b>	<b>-13.957</b>

$$H_{11} = 3.489 + 15.704 + 3.489 = 22.682 \Rightarrow$$



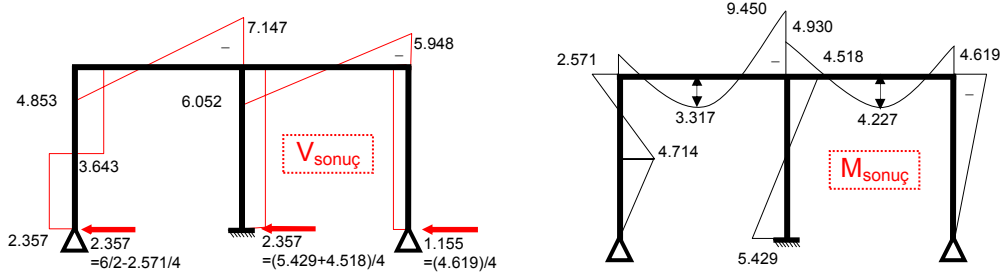
$$H_{10} = 4.23 + 0.167 - 0.565 = 3.832 \Rightarrow H_{11} = 3.489 + 15.704 + 3.489 = 22.682 \leftarrow$$

$$H_{10} + H_{11} \delta_1 = 0 \quad 3.832 - 22.682 \delta = 0 \quad \delta_1 = 3.832 / 22.682 = 0.169$$

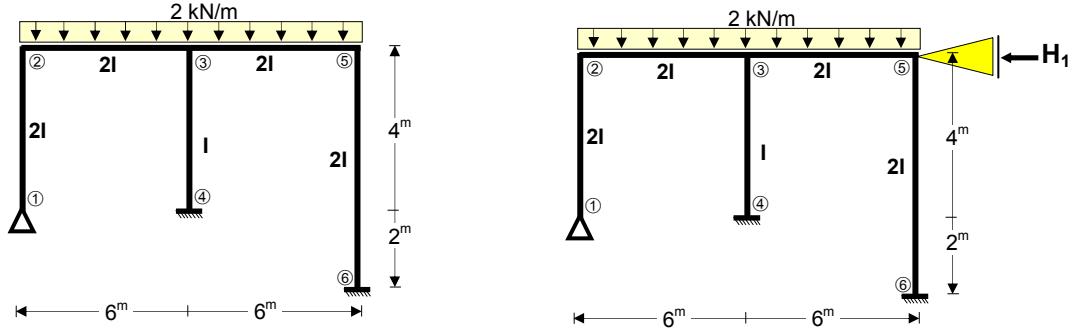
Çubuk uç momentleri aşağıda tabloda hesaplanmıştır.

Çubuk ucu	$M_0$	$M_1$	$\delta_1$	Sonuç $M = M_0 + M_1 \times \delta_1$	Düğüm dengesi
$M_{21}$	4.930	-13.957	0.169	2.571	0.00
$M_{23}$	-4.930	13.957	0.169	-2.571	
$M_{32}$	6.968	14.688	0.169	9.450	0.00
$M_{34}$	0.447	-29.376	0.169	-4.518	
$M_{35}$	-7.412	14.688	0.169	-4.930	0.00
$M_{43}$	0.222	-33.438	0.169	-5.429	
$M_{53}$	2.260	13.957	0.169	4.619	0.00
$M_{56}$	-2.260	-13.957	0.169	-4.619	

Sonuç kesme kuvveti ve moment alanı,



**ÖRNEK 5.17:** Düğüm noktaları hareketli sistemin **M** alanının CROSS yöntemiyle elde edilmesi.



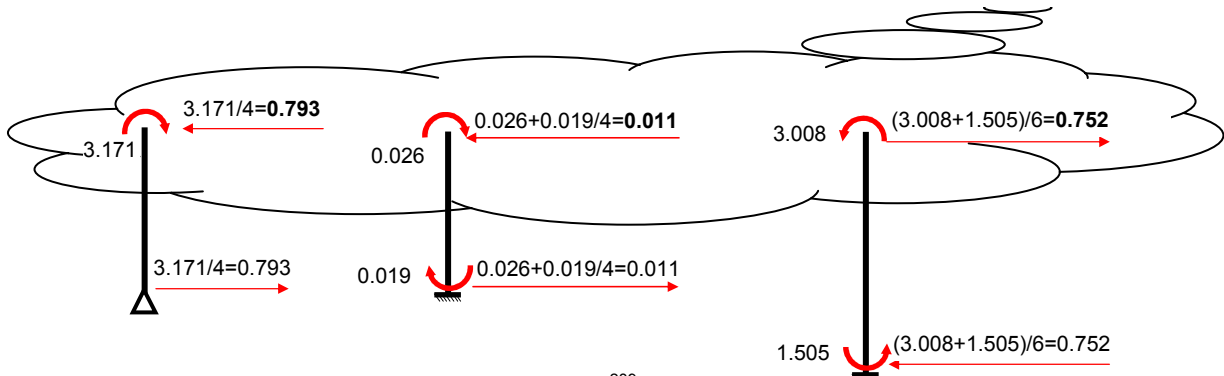
İlk önce sistem aşağıdaki şekilde düğüm noktaları sabit hale getirilir ve buna göre çözüm yapılarak bu mesnedin yatay tepki kuvveti ( $H_1$ ) bulunur.

$$\text{Ankastrelik momentleri} \quad -M_{23} = M_{32} = \frac{2 \times 6^2}{12} = -6 \text{ kNm} \quad M_{35} = M_{53} = \frac{2 \times 6^2}{12} = -6 \text{ kNm}$$

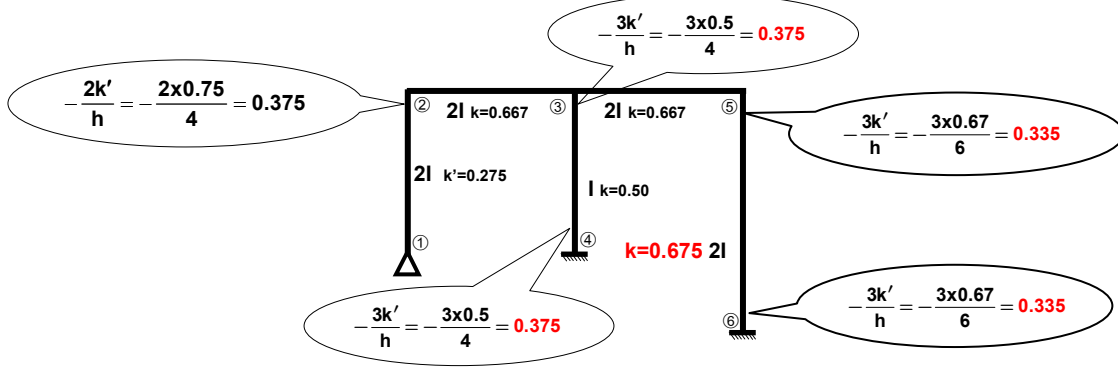
GENEL DURUM İÇİN ÇÖZÜM ( $\delta = 0$ )										
Düğüm		②	③	④	⑤	⑥				
Çubuk		②-①	②-③	③-②	③-④	③-⑤	④-③	⑤-③	⑤-⑥	⑥-⑤
Dağıtma sayıları		0.53	0.47	0.364	0.272		0.364	0.50	0.50	-
Ankastrelik momentleri			-6	6		-6		6		
Düğüm	Dağıtılabacak M									
2-5	6	<u>3.18</u>	<u>2.820</u>	1.41		-1.50		<u>-3.00</u>	<u>-3.00</u>	-1.50
3	1.41-1.5=-0.09		0.017	<u>0.033</u>	<u>0.024</u>	<u>0.033</u>	0.017	0.017		
2-5	0.017	<u>-0.009</u>	<u>-0.008</u>	-0.004		-0.005		<u>-0.009</u>	<u>-0.009</u>	-0.005
3	-0.004-0.005=-0.009			<u>0.003</u>	<u>0.003</u>	<u>0.003</u>	0.002			
Uç momentleri		<u>3.171</u>	-3.171	7.442	0.027	-7.469	0.019	3.008	-3.009	-1.505

Bulunan uç momentlerinden dolayı yatay denge yazılarak sistemi düğüm noktaları sabit hale getirmek için çerçevenin üst kısmına konan mesnedin yatay tepkisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$H_1 = 0.793 + 0.011 - 0.752 = 0.052 \Rightarrow$$

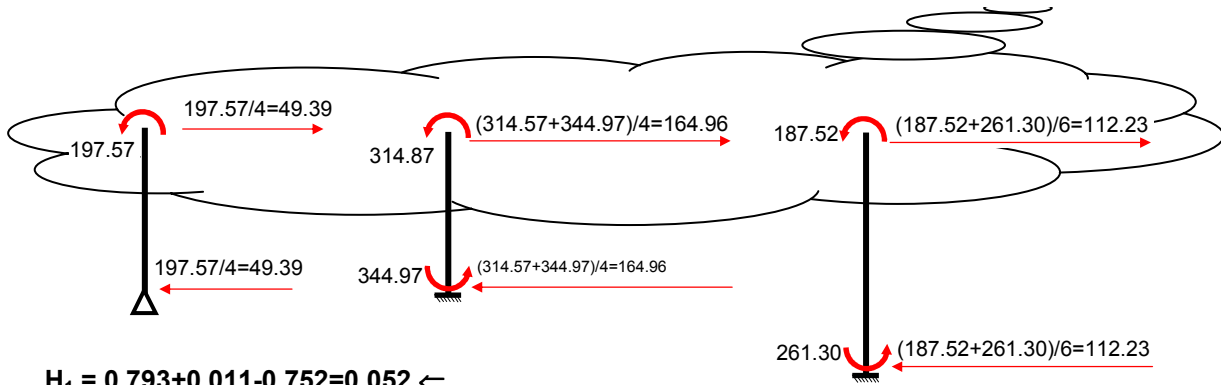


İkinci adım olarak da kolonların rijitliklerine göre birim deplasman verildiğinde oluşan momentlere göre sistem bir defa daha çözümlenerek yatay mesnet tepkisi ( $H_{11}$ ) bulunur.



GENEL DURUM İÇİN ÇÖZÜM ( $\delta = 1$ )										
Düğüm		②		③			④	⑤		⑥
Çubuk		②-①	②-③	③-②	③-④	③-⑤	④-③	⑤-③	⑤-⑥	⑥-⑤
Dağıtma sayıları		0.53	0.47	0.364	0.272	0.364	0.364	0.50	0.50	-
Ankastrelik momentleri		-375			-375		-375		-335	-335
Düğüm	Dağıtılacak M									
2-5	-375	<u>198.75</u>	<u>176.25</u>	88.13		83.75		<u>167.5</u>	<u>167.5</u>	83.75
3	88.13+83.75-375		36.97	<u>73.94</u>	<u>55.25</u>	<u>73.94</u>	27.63	36.97		
2-5	36.97	<u>-19.59</u>	<u>-17.38</u>	-8.69		-9.24		<u>-18.49</u>	<u>-18.49</u>	-9.24
3	-9.24-8.69=-17.93		3.26	<u>6.53</u>	<u>4.88</u>	<u>6.53</u>	2.44	3.26		
2-5	3.26	<u>-1.73</u>	<u>-1.53</u>					<u>-1.63</u>	<u>-1.63</u>	-0.81
Uç momentleri		-197.57	197.57	159.91	-314.87	154.98	-344.93	187.61	-187.62	-261.30

$$H_{11} = 49.39 + 164.96 + 112.23 = 326.58 \Rightarrow$$



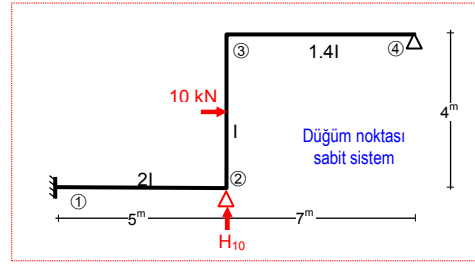
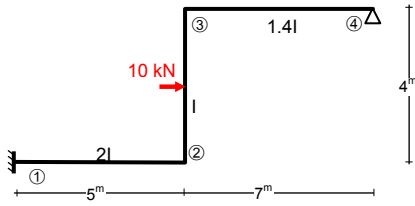
$$H_1 = 0.793 + 0.011 - 0.752 = 0.052 \leftarrow$$

$$H_{11} = 49.39 + 164.96 + 112.23 = 326.58 \Rightarrow$$

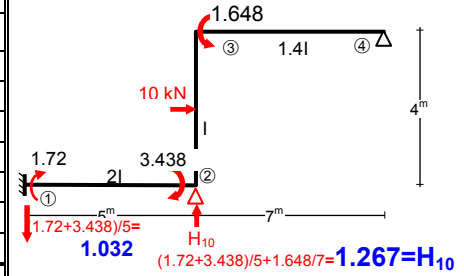
$$H_1 + H_{11} \delta_1 = 0 \quad 326.58 \delta_1 - 0.052 = 0 \quad \delta_1 = 0.052 / 326.58 = 159.225 \cdot 10^{-6}$$

<b>.Çubuk uç momentleri</b>				
Uç	M <sub>0</sub>	M <sub>1</sub>	δ <sub>1</sub> (10 <sup>-6</sup> )	Sonuç M=M <sub>0</sub> + M <sub>1</sub> x δ <sub>1</sub>
M <sub>21</sub>	3.171	-197.57	<b>159.225</b>	<b>3.140</b>
M <sub>23</sub>	-3.171	197.57	<b>159.225</b>	<b>-3.140</b>
M <sub>32</sub>	7.442	159.91	<b>159.225</b>	<b>7.467</b>
M <sub>34</sub>	0.027	-314.87	<b>159.225</b>	<b>-0.023</b>
M <sub>35</sub>	-7.469	154.98	<b>159.225</b>	<b>-7.444</b>
M <sub>43</sub>	0.019	-344.93	<b>159.225</b>	<b>-0.036</b>
M <sub>53</sub>	3.008	187.61	<b>159.225</b>	<b>3.038</b>
M <sub>56</sub>	-3.008	-187.52	<b>159.225</b>	<b>-3.038</b>
M <sub>65</sub>	-1.505	-261.30	<b>159.225</b>	<b>-1.547</b>

**Örnek:** Şekilde verilen sistemin M alanının elde edilmesi (Cross)

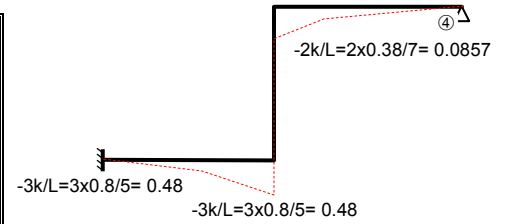


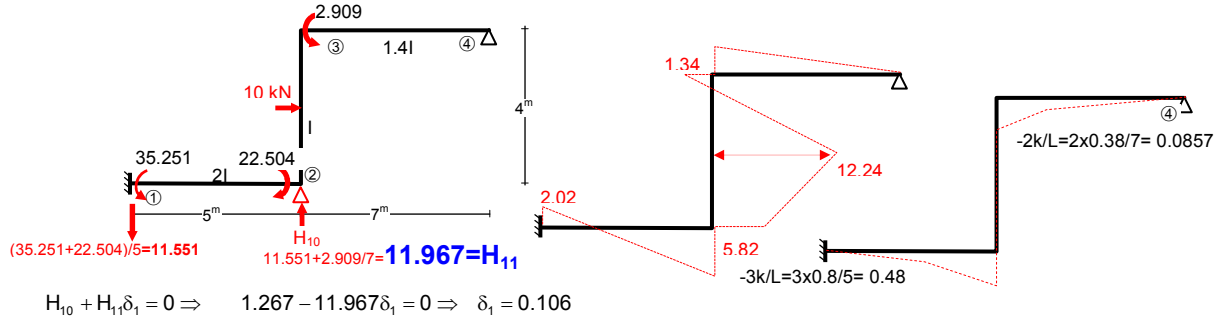
Düğüm		①	②		③	
Çubuk uçları		①-②	②-①	②-③	③-②	③-④
Dağıtma sayıları			<b>0.444</b>	<b>0.556</b>	<b>0.769</b>	<b>0.231</b>
Ankastrelik momentleri				<b>-5</b>	<b>5</b>	
Düğüm	Dağıtılacak moment					
<b>3</b>	5			<b>-1.923</b>	<b>-3.845</b>	<b>-1.155</b>
<b>3</b>	$-[5+1.923]=-6.923$	1.537	<b>3.074</b>	<b>3.849</b>	<b>1.925</b>	
<b>3</b>	1.925			<b>-0.740</b>	<b>-1.480</b>	<b>-0.445</b>
<b>2</b>	0.74	<b>0.165</b>	<b>0.329</b>	<b>0.411</b>	<b>0.206</b>	
<b>3</b>	0.206			<b>-0.079</b>	<b>-0.158</b>	<b>-0.048</b>
<b>2</b>	0.079	<b>0.018</b>	<b>0.035</b>	<b>0.044</b>		
Uç momentleri		<b>1.72</b>	<b>-3.438</b>	<b>3.348</b>	<b>1.648</b>	<b>-1.648</b>



Dış yüklerden yanda denge yazılarak düğüm noktaları sabitliğini sağlayan H<sub>10</sub> bulunur. δ<sub>1</sub>=1 birim yükleme yapılip sistem tekrar aşağıdaki şekilde çözülür.

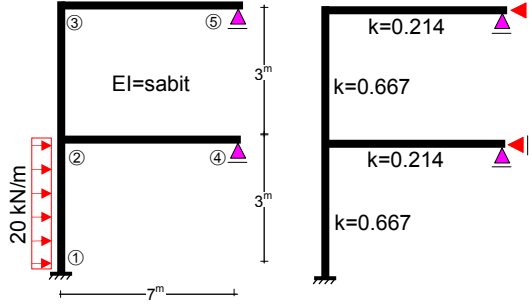
Düğüm		①	②		③	
Çubuk uçları		①-②	②-①	②-③	③-②	③-④
Dağıtma sayıları			<b>0.444</b>	<b>0.556</b>	<b>0.769</b>	<b>0.231</b>
Ankastrelik momentleri		<b>-48</b>	<b>-48</b>		<b>(dönüş)+8.57</b>	
Düğüm	Dağıtılacak moment					
<b>2</b>	48	10.656	<b>21.312</b>	<b>26.668</b>	13.334	
<b>3</b>	13.334+8.57			<b>-8.426</b>	<b>-16.852</b>	<b>-5.062</b>
<b>2</b>	8.426	1.871	<b>3.741</b>	<b>4.685</b>	2.343	
<b>3</b>	2.343			<b>-0.901</b>	<b>-1.802</b>	<b>-0.541</b>
<b>2</b>	0.901	0.200	<b>0.400</b>	<b>0.501</b>	0.251	
<b>3</b>	0.251			<b>0.097</b>	<b>-0.193</b>	<b>-0.058</b>
	0.097	0.022	<b>0.043</b>	<b>0.054</b>		
Uç momentleri		<b>-35.251</b>	<b>-22.504</b>	<b>22.504</b>	<b>-2.909</b>	<b>2.909</b>





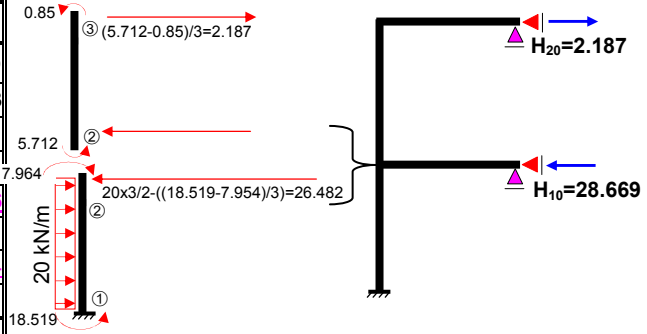
Sonuç moment değerleri	Düğüm		①		②		③		
	Çubuk uçları		①-②	②-①	②-③	③-②	③-④		
	Uç momentleri (düğüm sabit)		1.72	-3.438	3.348	1.648	-1.648		
	Uç momentleri ( $\delta=1$ )		-35.251	-22.504	22.504	-2.909	2.909		
	SONUÇ $M=\text{sabit}+(\delta=1) \times \delta$		-2.02	-5.82	5.82	1.34	-1.34		

**ÖRNEK:** Şekilde verilen sistemin moment alanının **CROSS** yöntemi ile elde edilmesi.

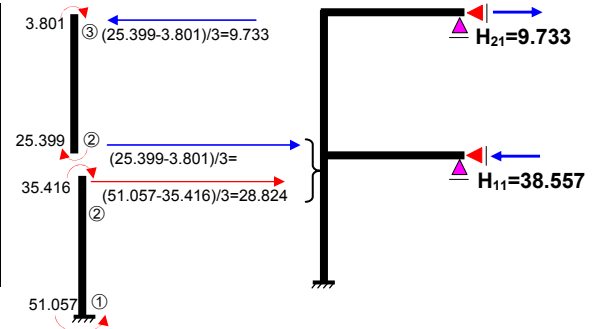


**Çözüm:** Bu sistemin çözümü düğüm noktaları sabit sistemde dış yüklerin olması durumu, birinci kat için  $\delta_1=1$  ve ikinci kat için  $\delta_2=1$  olmak üzere 3 aşamada yapılır.

Düğüm noktaları sabit sistemin dış yükler altında çözümü						
	①	②		③		
	①-②	②-①	②-④	②-③	②-③	③-②
<b>d</b>		0.431	0.138	0.431	0.757	0.243
<b>M</b>	-15	15				
<b>2</b>	-3.233	-6.465	-2.070	-6.465	-3.233	
<b>3</b>				1.224	2.447	0.786
<b>2</b>	-0.264	-0.528	-0.169	-0.528	-0.264	
<b>3</b>				0.100	0.200	0.064
<b>2</b>	-0.022	-0.043	-0.014	-0.043		
<b>Σ</b>	-18.519	7.964	-2.253	-5.712	-0.85	0.85

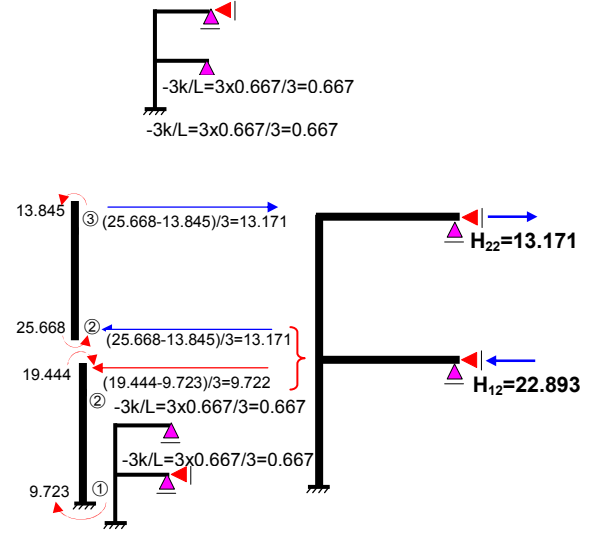


$\delta_1=1$ için çözüm [ $M_1$ ]						
	①	②		③		
	①-②	②-①	②-④	②-③	②-③	③-②
<b>d</b>		0.431	0.138	0.431	0.757	0.243
<b>M</b>	-66.7	-66.7				
<b>2</b>	14.374	28.748	9.205	28.748	14.374	
<b>3</b>				-5.441	-10.881	-3.433
<b>2</b>	1.173	2.345	0.751	2.345	1.173	



3				-0.444	-0.888	-0.285
2	0.096	0.191	0.061	0.191	0.096	
3					-0.072	-0.023
$\Sigma$	-51.057	-35.416	10.017	25.399	3.801	-3.801

$\delta_2=1$ için çözüm [M <sub>2</sub> ]						
	①	②		③		
	①-②	②-①	②-④	②-③	②-③	③-②
d		0.431	0.138	0.431	0.757	0.243
M				-66.7	-66.7	
3				25.246	50.492	16.208
2	8.934	17.867	5.721	17.867	8.934	
3				-3.382	-6.763	-2.171
2	0.729	1.458	0.467	1.458	0.729	
3				-0.276	-0.552	-0.177
2	0.06	0.119	0.038	0.119	0.06	
3					-0.045	-0.015
$\Sigma$	9.723	19.444	6.226	-25.668	-13.845	13.845



Yukarıdaki 3 çözümden bulunan değerler kullanılarak,

$$\begin{aligned} H_{10} + H_{11} \delta_1 + H_{12} \delta_2 &= 0 & -28.669 + 38.557 \delta_1 - 22.893 \delta_2 &= 0 \\ H_{20} + H_{21} \delta_1 + H_{22} \delta_2 &= 0 & 2.187 - 9.733 \delta_1 + 13.171 \delta_2 &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümünden  $\delta_1=1.149$  ve  $\delta_2=0.683$  olarak bulunur. Bu değerler kullanılarak çubuk uç momentleri aşağıda hesaplanarak diyagramı çizilmiştir.

$$M_{ij} = M_0 + M_1 \delta_1 + M_2 \delta_2$$

$$M_{12} = -18.519 - 51.057 \cdot 1.149 + 9.723 \cdot 0.683 = -70.55 \text{ kNm}$$

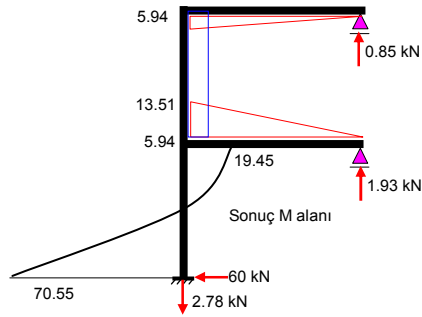
$$M_{21} = 7.964 - 35.416 \cdot 1.149 + 19.444 \cdot 0.683 = -19.45 \text{ kNm}$$

$$M_{24} = 2.253 + 10.017 \cdot 1.149 + 6.226 \cdot 0.683 = 13.51 \text{ kNm}$$

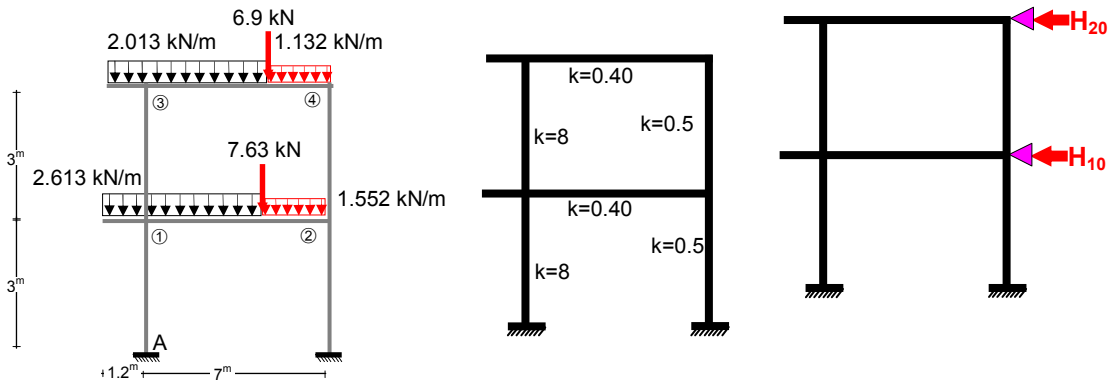
$$M_{23} = -5.712 + 25.339 \cdot 1.149 - 25.668 \cdot 0.683 = 5.94 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = -0.85 + 3.801 \cdot 1.149 - 13.845 \cdot 0.683 = -5.94 \text{ kNm}$$

$$M_{35} = 0.85 - 3.801 \cdot 1.149 + 13.845 \cdot 0.683 = 5.94 \text{ kNm}$$



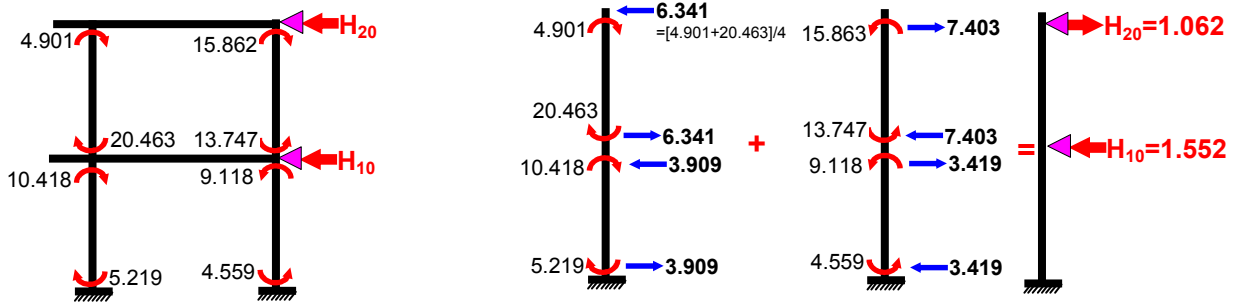
**ÖRNEK:** Şekilde verilen sistemin moment alanının **CROSS** yöntemi ile elde edilmesi. (Konsollar 1.2<sup>m</sup>, Tekil yükler sol tarafa)



**Çözüm:** Sistem düğüm noktaları hareketli olduğu için önce düğüm noktası sabit hale getirilerek çubuk uç momentleri  $[M_0]$  bulunur. Kolon uç momentlerinden kolonların karşıladığı kesme kuvveti ve yatay denge yazılarak kat yatay kuvvetleri  $[H_{10}, H_{20}]$  belirlenir.

	Konsol	1				2				Konsol	3		4	
		①-A	①-②	①-③	A-①	②-①	②-④	②-B	B-②		③-①	③-④	④-③	④-②
<b>d</b>		0.488	0.024	0.488		0.286	0.357	0.357			0.95	0.05	0.444	0.556
<b>M</b>	-1.88		<b>-25.86</b>			<b>29.91</b>				-1.45	<b>-20.51</b>		<b>24.36</b>	
<b>2</b>			-4.277			<b>-8.554</b>	<b>-10.678</b>	<b>-10.678</b>	<b>-5.339</b>					<b>-5.339</b>
<b>1</b>		<b>15.624</b>	<b>0.768</b>	<b>15.624</b>	<b>7.812</b>	<b>0.384</b>					<b>7.812</b>			
<b>4</b>							-4.288					-4.223	<b>-8.445</b>	<b>-10.576</b>
<b>3</b>				8.726							<b>17.452</b>	<b>0.919</b>	0.459	
<b>1</b>		<b>-4.258</b>	<b>-0.209</b>	<b>-4.258</b>	-2.129	-0.105					-2.129			
<b>2</b>			<b>0.573</b>			<b>1.147</b>	<b>1.431</b>	<b>1.431</b>	<b>0.716</b>					<b>0.716</b>
<b>3</b>				1.011							<b>2.022</b>	<b>0.106</b>	0.053	
<b>4</b>							-0.341					-0.273	<b>-0.545</b>	<b>-0.683</b>
<b>1</b>		<b>-0.773</b>	<b>-0.038</b>	<b>-0.773</b>	-0.386	-0.019					-0.376			
<b>3</b>				0.308							<b>0.617</b>	<b>0.032</b>	0.016	
<b>2</b>			0.051			<b>0.103</b>	<b>0.129</b>	<b>0.129</b>	<b>0.064</b>					<b>0.064</b>
<b>1</b>		<b>-0.175</b>	<b>-0.009</b>	<b>-0.175</b>	-0.088						-0.088			
<b>4</b>												-0.018	<b>-0.036</b>	<b>-0.045</b>
<b>3</b>											<b>0.101</b>	<b>0.005</b>		
<b>Σ</b>	-1.88	10.418	-29.001	20.463	5.209	22.866	-13.747	-9.118	-4.559	-1.45	4.901	-3.452	15.862	-15.863

Düğüm noktaları sabit sistemde dış yüklerden dolayı oluşan yatay kuvvetler  $[H_{10}, H_{20}]$  aşağıdaki şekilde hesaplanır.



<b><math>\delta_1=1</math> için çözüm</b>														
	Konsol	1				2				Konsol	3		4	
		①-A	①-②	①-③	A-①	②-①	②-④	②-B	B-②		③-①	③-④	④-③	④-②
<b>d</b>		0.488	0.024	0.488		0.286	0.357	0.357			0.95	0.05	0.444	0.556
<b>M</b>		<b>-60</b>			<b>-60</b>									
<b>1</b>		<b>29.28</b>	<b>1.44</b>	<b>29.28</b>	14.64	0.72					14.64			
<b>3</b>				<b>-6.954</b>							<b>-13.908</b>	<b>-0.732</b>	-0.366	
<b>2</b>			0.433			<b>0.887</b>	<b>1.082</b>	<b>1.082</b>	<b>0.541</b>					1.210
<b>1</b>		<b>3.182</b>	<b>0.157</b>	<b>3.182</b>	1.591	0.078					1.591			
<b>3</b>				-0.756							<b>-1.511</b>	<b>-0.080</b>	-0.04	
<b>4</b>							-0.224					-0.179	<b>-0.357</b>	<b>-0.447</b>
<b>1</b>		<b>0.369</b>	<b>0.018</b>	<b>0.369</b>	0.184	0.009					0.184			
<b>2</b>						<b>0.039</b>	<b>0.049</b>	<b>0.049</b>	<b>0.025</b>					
<b>Σ</b>		-27.169	2.048	25.121	-43.585	1.733	0.907	-2.619	-3.184		0.996	-0.991	-0.763	0.763

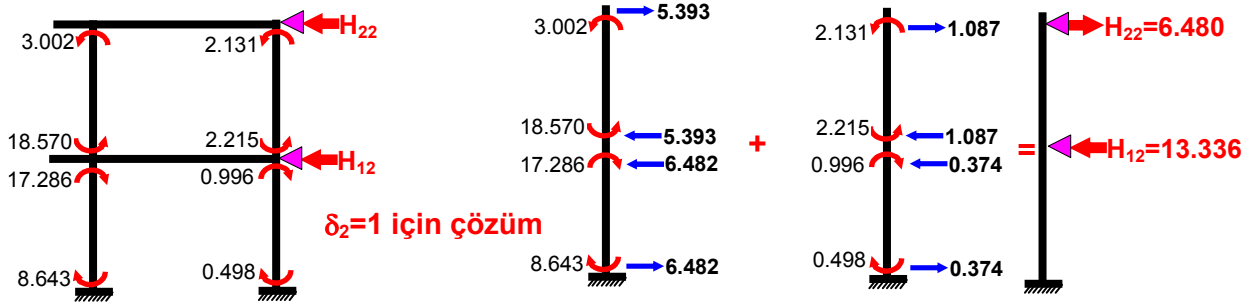


$\delta_1=1$  için çözüm sonucu bulunan momentlerden yatay kuvvetler  $[H_{11}, H_{12}]$  hesaplanır.



$\delta_2=1$ için çözüm														
	Konsol	1				2				Konsol	3		4	
		①-A	①-②	①-③	A-①	②-①	②-④	②-B	B-②		③-①	③-④	④-③	④-②
d		0.488	0.024	0.488		0.286	0.357	0.357			0.95	0.05	0.444	0.556
M				-60			-3.75				-60			-3.75
1		29.28	1.44	29.28	14.64	0.72					14.64			
3				21.546							43.092	2.268	1.134	
2			0.433			0.887	1.082	1.082	0.541					0.541
1		-10.726	-0.527	-10.726	-5.363	-0.264					-5.363			
4							0.577					0.461	0.921	1.154
3				2.328							4.657	0.245	0.123	
1		-1.136	-0.056	-1.136	-0.568	-0.028					-0.568			
3				0.270							0.540	0.028	0.014	
4							-0.038						-0.061	-0.076
1		-0.132	-0.006	-0.132	-0.066	-0.003								
2						-0.069	-0.086	-0.086	-0.043					
$\Sigma$		17.286	1.284	-18.57	8.643	1.243	-2.215	0.996	0.498		-3.002	3.002	2.131	-2.131

$\delta_2=1$  için çözümünde bulunan momentlerden yatay kuvvetler  $[H_{21}, H_{22}]$  hesaplanır.



$$H_{10} + H_{11} \delta_1 + H_{12} \delta_2 + H_{13} \delta_3 \dots + H_{1n} \delta_n = 0$$

$$H_{20} + H_{21} \delta_1 + H_{22} \delta_2 + H_{23} \delta_3 \dots + H_{2n} \delta_n = 0$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$H_{n0} + H_{n1} \delta_1 + H_{n2} \delta_2 + H_{n3} \delta_3 \dots + H_{nn} \delta_n = 0$$

Denklemleri yazılarak  $\delta$ 'lar aşağıdaki tablodaki bulunur.

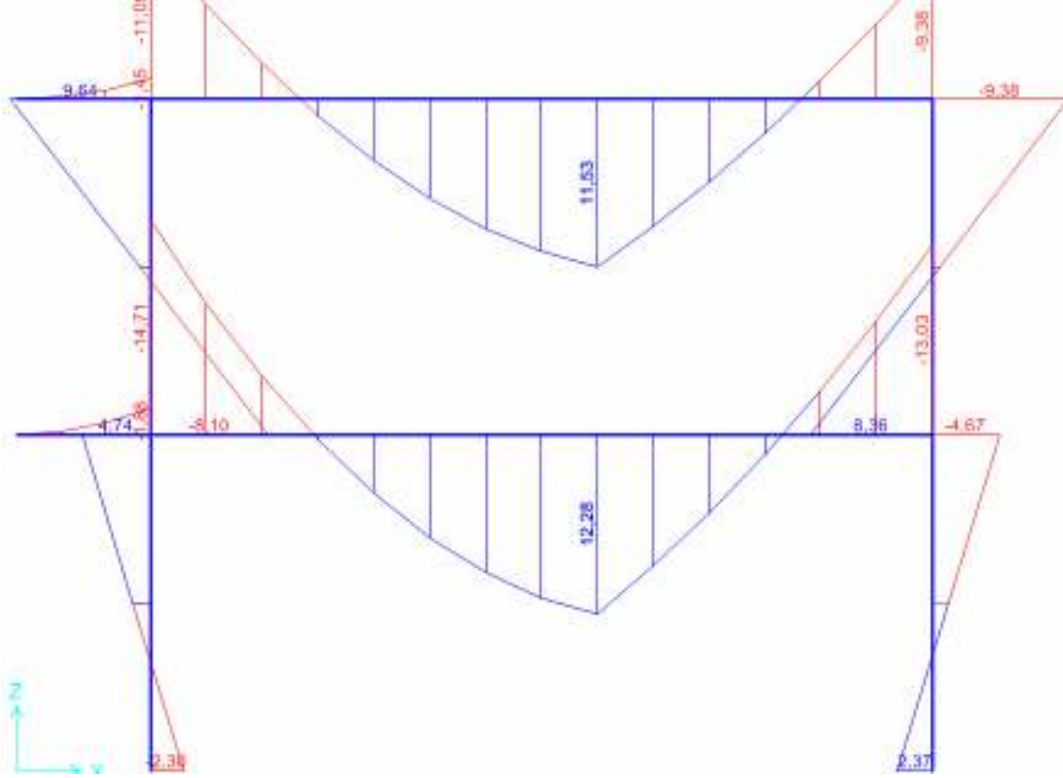
$\Sigma X_1$	=	$H_{10}$	$H_{11}\delta_1$	$H_{12}\delta_2$	=	0	1.552	$-26.093\delta_1$	$-13.336\delta_2$	=	0	$\delta_1$	=	0.10631
$\Sigma X_2$	=	$H_{20}$	$H_{21}\delta_1$	$H_{22}\delta_2$	=	0	-1.062	$6.947\delta_1$	$-6.480\delta_2$	=	0	$\delta_2$	=	0.0549

Bulunan bu  $\delta$  değerleri aşağıdaki moment denkleminde yerine yazılarak istenilen çubuklardaki uç momentleri hesaplanır.

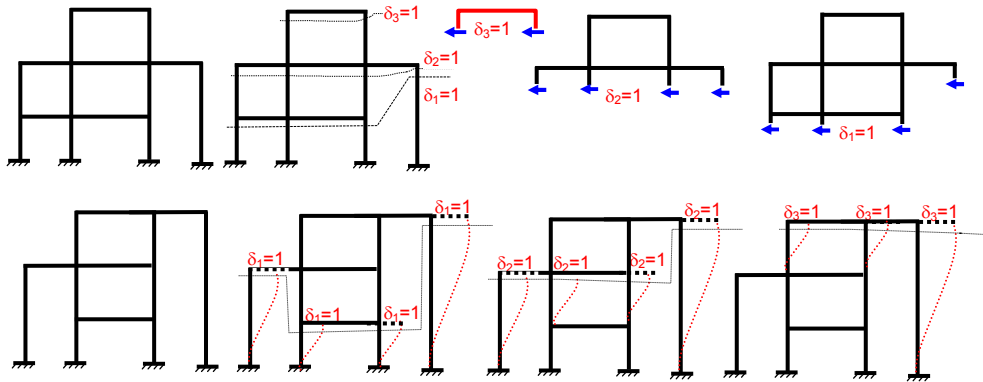
$$M_{ij} = M_0 + M_1 \cdot \delta_1 + M_2 \cdot \delta_2 + M_3 \cdot \delta_3 \dots \dots \dots M_n \cdot \delta_n$$

$\Sigma X_1$	=	$H_{10}$	$H_{11}\delta_1$	$H_{12}\delta_2$	=	0	-1.552	$11.443\delta_1$	$6.111\delta_2$	=	0	$\delta_1$	=	0.10631
$\Sigma X_2$	=	$H_{20}$	$H_{21}\delta_1$	$H_{22}\delta_2$	=	0	1.062	$-13.336\delta_1$	$6.480\delta_2$	=	0	$\delta_2$	=	0.0549

$\delta_1$  ve  $\delta_2$ 'in gerçek değerleri 10'na bölünerek bulunur.



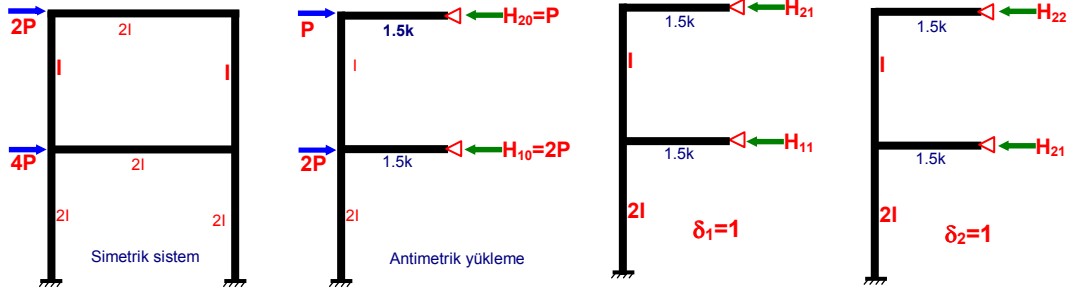
Şekilde kat yükseklikleri değişik sistemde yatay deplasmanlar aşağıdaki şekilde yapılır.



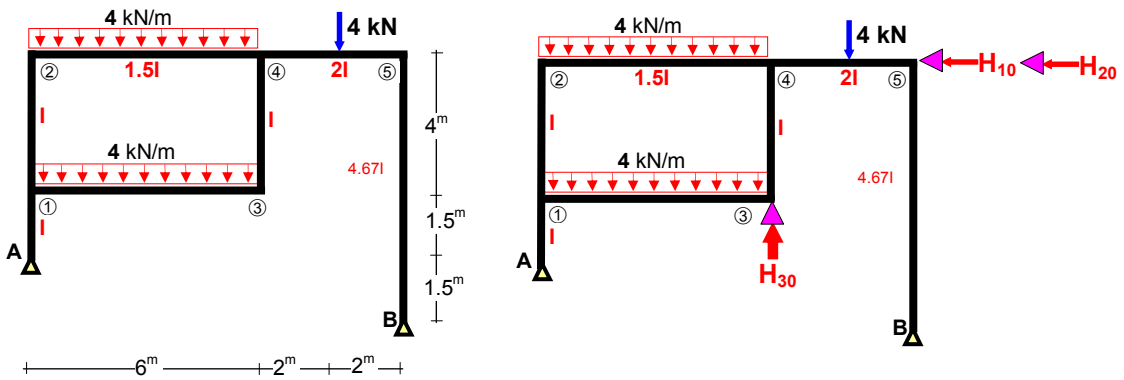
Şekilde yükleme durumu verilen simetrik sistemin Cross yöntemi ile çözümü,

- Sistem antimetrik yüklü,
- Düğüm noktaları sabit hale getirilir.
- Sistem bu haliyle yarım sistem olarak çözülür.

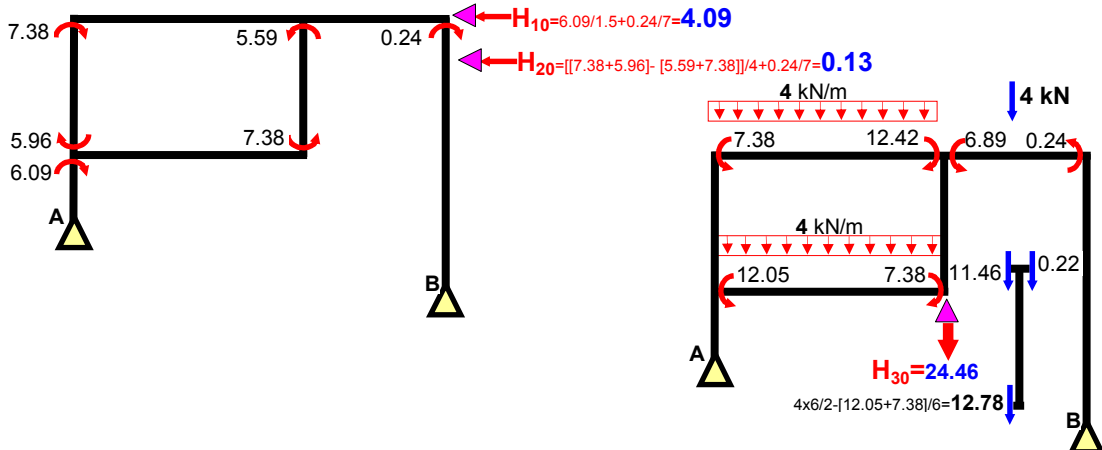
**Not:** Yarım sistem düğüm noktaları sabit olduğu için dış yüklerden oluşan yatay tepkiler [ $H_{10}$  ve  $H_{20}$ ] yatay dengeden hemen bulunur.



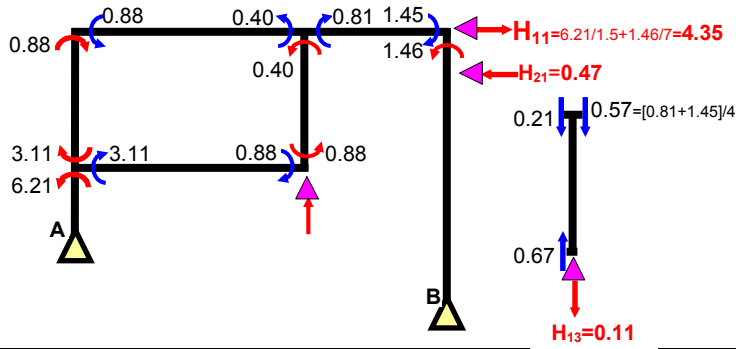
**ÖRNEK 5.20:** Şekilde verilen sistemin moment alanının **Cross** yöntemi ile çözümü.



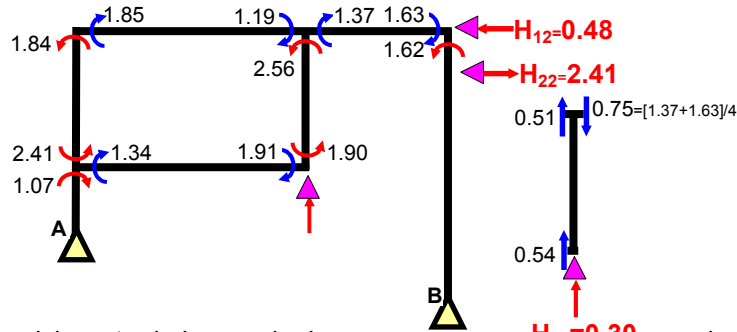
Dış yükler için çözüm												
Düğüm	1			2		3		4			5	
Uç	①-A	①-②	①-③	②-①	②-④	③-①	③-④	④-②	④-③	④-⑤	⑤-④	⑤-B
d	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5
M			-12		-12	12		12		-2	2	
1	6	3	3	1.5		1.5						
3			-3.38			-6.75	-6.75		-3.38			
2		2.63		5.25	5.25			2.63				
4					-1.16		-1.16	-2.31	-2.31	-4.63	-2.32	
2		0.29		0.58	0.58			0.29				
3			0.29			0.58	0.58		0.29			
4					-0.08		-0.08	-0.16	-0.16	-0.32	-0.16	
5										0.12	0.24	0.24
1	0.09	0.04	0.04	0.02		0.02						
2				0.03	0.03							
3						0.03	0.03					
4								-0.03	-0.03	-0.06		
Σ	6.09	5.96	-12.05	7.38	-7.38	7.38	-7.38	12.42	-5.59	-6.89	-0.24	0.24



$\delta_1=1$ için çözüm												
Düğüm	1			2		3		4			5	
Uç	①-A	①-②	①-③	②-①	②-④	③-①	③-④	④-②	④-③	④-⑤	⑤-④	⑤-B
d	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5
M	-13.33											-2.87
1	6.67	3.33	3.33	1.67		1.67						
5										0.72	1.43	1.43
2		-0.42		-0.84	-0.84			-0.42				
3			-0.42			-0.84	-0.84		-0.42			
1	0.42	0.21	0.21	0.10		0.10						
4					0.02		0.02	0.03	0.03	0.06	0.03	
2		-0.03		-0.06	-0.06			-0.03				
3			-0.03			-0.06	-0.06		-0.03			
1	0.03	0.02	0.02	0.10		0.10						
4								0.02	0.02	0.03	0.02	
5											-0.03	-0.03
$\Sigma$	-6.21	3.11	3.11	0.88	-0.88	0.88	-0.88	-0.40	-0.40	0.81	1.45	-1.46



$\delta_2=1$ için çözüm												
Düğüm	1			2		3		4			5	
Uç	①-A	①-②	①-③	②-①	②-④	③-①	③-④	④-②	④-③	④-⑤	⑤-④	⑤-B
d	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5
M		-3.75		-3.75			-3.75		-3.75			-2.87
1	1.88	0.94	0.94	0.47		0.47						
4					0.47		0.47	0.94	0.94	1.88	0.94	
5										0.48	0.96	0.96
2		0.70		1.41	1.41			0.70				
3			0.70			1.41	1.41		0.70			
4					-0.24	-0.24	-0.24	-0.47	-0.47	-0.94	-0.47	
1	-0.70	-0.35	-0.35	-0.18		-0.18						
5										0.12	0.24	0.24
2		0.11		0.21	0.21			0.11				
3			0.11			0.21	0.21		0.11			
4							-0.05	-0.09	-0.09	-0.17	-0.09	
1	-0.11	-0.06	-0.06									
5											0.05	0.05
$\Sigma$	1.07	-2.41	1.34	-1.84	1.85	1.91	-1.9	1.19	-2.56	1.37	1.63	-1.62



$\delta_3=1$  durumu için orta kolonun deplasmanı

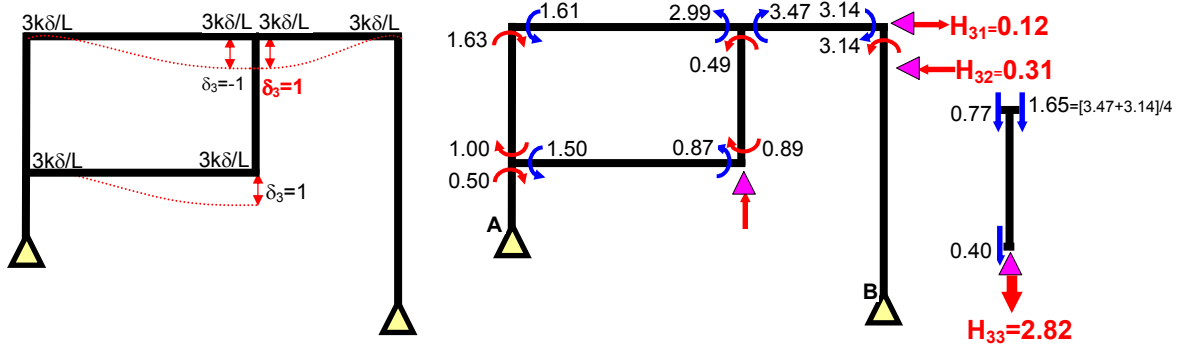
$H_{32}=0.30$

durumu

dikkate

alındığında saat dönüş yönü artı tersi ise eksi olarak kabul edilmiş ve ankastrelik momentleri buna göre bulunmuştur.

$\delta_3=1$ için çözüm												
Düğüm	1			2		3		4			5	
Uç	①-A	①-②	①-③	②-①	②-④	③-①	③-④	④-②	④-③	④-⑤	⑤-④	⑤-B
d	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5
M			-2.5		-2.5	-2.5		-2.5		7.5	7.5	
5										-1.88	-3.75	-3.75
4					-0.39		-0.39	-0.78	-0.78	-1.56	-0.78	
3			0.72			1.45	1.45		0.72			
2		0.72		1.45	1.45							
1	0.53	0.27	0.27	0.13		0.13						
4					-0.18		-0.18	-0.36	-0.36	-0.72	-0.36	
5										0.29	0.57	0.57
2		0.02		0.03	0.03			0.01				
3			0.02			0.03	0.03		0.01			
4					-0.04		-0.04	-0.08	-0.08	-0.16	-0.08	
5											0.04	0.04
2		0.01		0.02	0.02							
3			0.01			0.02	0.02					
1	-0.03	-0.02	-0.02									
$\Sigma$	0.5	1.00	-1.5	1.63	-1.61	-0.87	0.89	-2.99	-0.49	3.47	3.14	-3.14



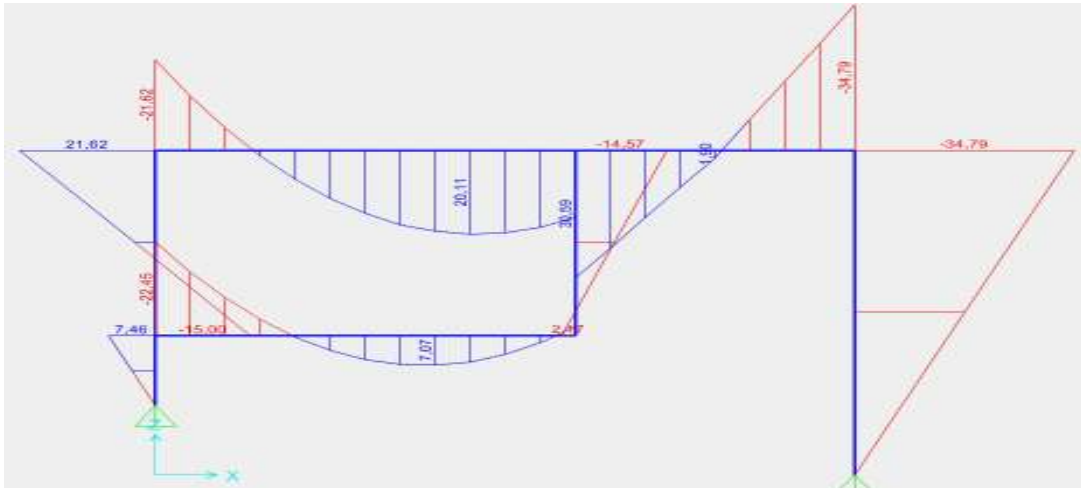
$\Sigma X_1 =$	$H_{10}$	$H_{11}\delta_1$	$H_{12}\delta_2$	$H_{13}\delta_3$	$= 0$
$\Sigma X_2 =$	$H_{20}$	$H_{21}\delta_1$	$H_{22}\delta_2$	$H_{23}\delta_3$	$= 0$
$\Sigma X_3 =$	$H_{30}$	$H_{31}\delta_1$	$H_{32}\delta_2$	$H_{33}\delta_3$	$= 0$

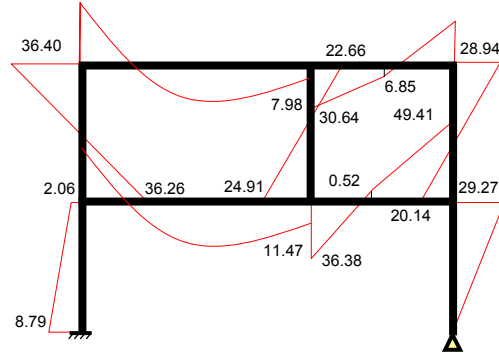
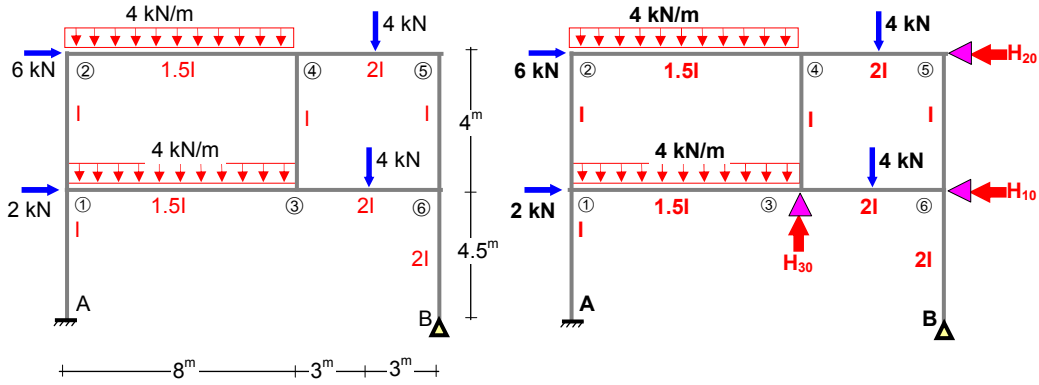
-4.09	$0.12\delta_1$	$-0.48\delta_2$	$0.12\delta_3$	$= 0$
-0.13	$-0.31\delta_1$	$2.41\delta_2$	$-0.31\delta_3$	$= 0$
24.46	$-2.82\delta_1$	$0.30\delta_2$	$-2.82\delta_3$	$= 0$

$\delta_1 =$	40.15
$\delta_2 =$	9.14
$\delta_3 =$	30.50

Örnek olarak bazı uç momentlerinin hesabı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Uç M	$M_0$	$\delta_1 M$	$\delta_2 M$	$\delta_3 M$		
$M_{12} =$	5.96	$40.15 \times 3.11$	$(-2.41) \times 9.14$	$30.50 \times 1.00$	$=$	139.30
$M_{13} =$	-12.05	$40.15 \times 3.11$	$1.34 \times 9.14$	$30.50 \times (-1.5)$	$=$	79.31
$M_{1A} =$	6.09	$40.15 \times (-6.21)$	$1.07 \times 9.14$	$30.50 \times 0.5$	$=$	-218.21
					$\Sigma = 0$	



**ÖRNEK 5.21: Şekilde verilen çerçevenin moment alanının Cross yöntemi ile hesabı**


$\delta_3=1$ için çözüm														
Düğüm	1			2			3			4			5	
Uç	①-A	①-②	①-③	②-①	②-④	③-①	③-①	③-④	④-②	④-③	④-⑤	⑤-④	⑤-B	
<b>d</b>	<b>0.5</b>	<b>0.25</b>	<b>0.25</b>	<b>0.5</b>	<b>0.5</b>		<b>0.5</b>	<b>0.5</b>	<b>0.25</b>	<b>0.25</b>	<b>0.5</b>	<b>0.5</b>	<b>0.5</b>	
<b>M</b>			<b>-2.5</b>		<b>-2.5</b>		<b>-2.5</b>		<b>-2.5</b>		<b>7.5</b>	<b>7.5</b>		
5											<b>-1.88</b>	<b>-3.75</b>	<b>-3.75</b>	
4					<b>-0.39</b>			<b>-0.39</b>	<b>-0.78</b>	<b>-0.78</b>	<b>-1.56</b>	<b>-0.78</b>		
3			<b>0.72</b>				<b>1.45</b>	<b>1.45</b>		<b>0.72</b>				
2		<b>0.72</b>		<b>1.45</b>	<b>1.45</b>				<b>0.72</b>					
1	<b>0.53</b>	<b>0.27</b>	<b>0.27</b>	<b>0.13</b>			<b>0.13</b>							
4					<b>-0.18</b>			<b>-0.18</b>	<b>-0.36</b>	<b>-0.36</b>	<b>-0.72</b>	<b>-0.36</b>		
5											<b>0.29</b>	<b>0.57</b>	<b>0.57</b>	
2		<b>0.02</b>		<b>0.03</b>	<b>0.03</b>				<b>0.01</b>					
3			<b>0.02</b>				<b>0.03</b>	<b>0.03</b>		<b>0.01</b>	<b>0.01</b>			
4					<b>-0.04</b>			<b>-0.04</b>	<b>-0.08</b>	<b>-0.08</b>	<b>-0.16</b>	<b>-0.08</b>		
5												<b>0.04</b>	<b>0.04</b>	
2		<b>0.01</b>		<b>0.02</b>	<b>0.02</b>									
3			<b>0.01</b>				<b>0.02</b>	<b>0.02</b>						
1	<b>-0.03</b>	<b>-0.02</b>	<b>-0.02</b>											
<b>Σ</b>	<b>0.5</b>	<b>1.00</b>	<b>-1.5</b>	<b>1.63</b>	<b>-1.61</b>	<b>-0.87</b>		<b>0.89</b>	<b>-2.99</b>	<b>-0.49</b>	<b>3.47</b>	<b>3.14</b>	<b>-3.14</b>	